PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 8

1. Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para la media de una población normal con varianza conocida.

2. Se realiza a 10 pacientes un análisis de sangre con el fin de determinar el porcentaje de hemoglobina, obteniéndose $\bar{X} = 12\%$.

   a) Hallar un intervalo de confianza para la media verdadera de nivel exacto 0.90, suponiendo que la concentración de hemoglobina se distribuye normalmente y que $\sigma = 0.6\%$.

   b) Si se quisiera que la longitud del intervalo hallado en a) fuera a lo sumo 0.5, ¿a cuántos pacientes debería analizarse?

3. Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para la varianza de una población normal con media conocida.

4. En un aserradero se cortan varillas de madera cuya longitud es una v.a. con distribución normal. Se miden 25 varillas elegidas al azar, obteniéndose $\bar{X} = 180$ cm y $s = 10$ cm.

   Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto 0.90 para la varianza verdadera, suponiendo que $\mu = 185$.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{E}(\lambda)$.

   a) Probar que $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución χ^2_{2n}.

   b) Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel exacto $1 - \alpha$.

   c) ¿Cuál sería el intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para $E(X_1)$? ¿Cuál sería su longitud esperada?

   d) Aplicar (b) a los datos del Ejercicio 5.(a) de la Práctica 7, con un nivel del 95%.

   e) Hallar un intervalo de nivel asintótico $1 - \alpha$ para λ.

6. Una muestra aleatoria de 1000 votantes es encuestada respecto a cierta propuesta política. Como resultado, 200 están de acuerdo con la propuesta, 600 se oponen y 200 están indecisos.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.90 para la proporción de votantes que se oponen a la propuesta.

   b) ¿Cuántos votantes deberían encuestarse para que la longitud del intervalo obtenido fuese menor o igual que 0.02?

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $Bi\,(k, \theta)$.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para θ, siendo k conocido.

   b) Encontrar una cota superior para la longitud del intervalo hallado en el inciso anterior.

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{P}\,(\lambda)$.

   a) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para λ.

   b) Aplicar (a) a los datos del Ejercicio 5.(b) de la Práctica 7, con $\alpha = 0.05$.

9. a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{U}[0, \theta]$. Hallar el intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para θ, de menor longitud. (SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\max\limits_{1\le i\le n}(X_i)/\theta$.)

   b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad

   $$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x)$$

   Hallar el intervalo de confianza de nivel exacto $1-\alpha$ para θ, de menor longitud. (SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\min\limits_{1\le i\le n}(X_i) - \theta$.)

10. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. continuas i.i.d. y con función de densidad dada por $f(x)$. Sea $\tilde{\mu}$ la mediana de la distribución de las X's, es decir $P(X_i \le \tilde{\mu}) = \dfrac{1}{2}$ para todo i.

    a) Probar que

    $$P\left(\max_{1\le i\le n} X_i < \tilde{\mu} \quad \cup \quad \min_{1\le i\le n} X_i > \tilde{\mu}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

    b) Deducir que $\left(\min\limits_{1\le i\le n} X_i,\ \max\limits_{1\le i\le n} X_i\right)$ es un intervalo de confianza para $\tilde{\mu}$ de nivel $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.