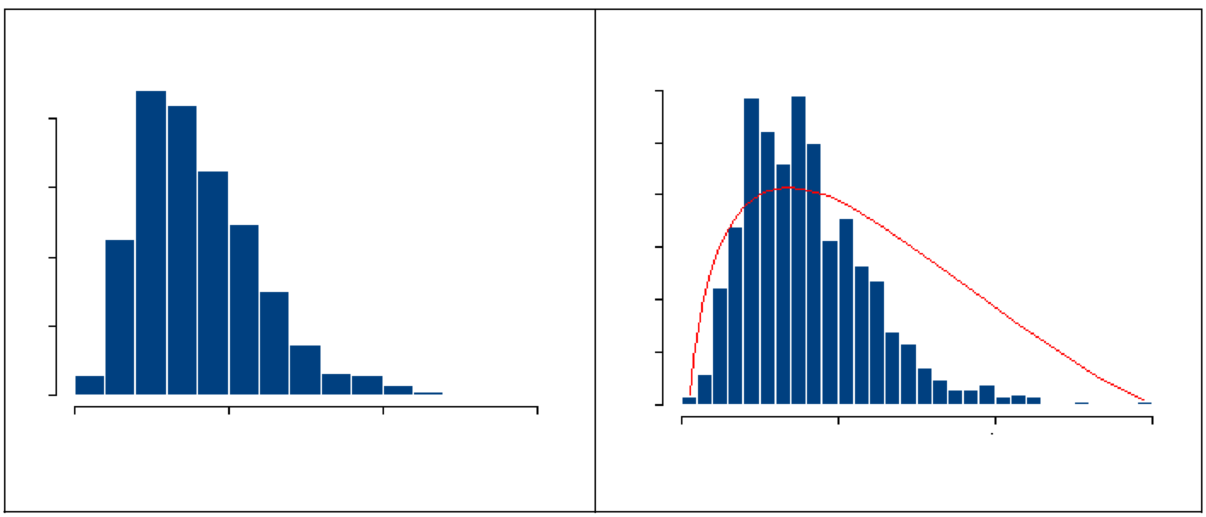
Variables aleatorias continuas

Ejemplo: Con el fin de realizar un control de calidad en una fábrica de baterías, se mide el tiempo de duración de baterías elegidas al azar y se define la v.a.

X: tiempo de duración de una batería

La v.a. *X* es esencialmente continua ("tiempo"), siendo su rango el intervalo real $[0,\infty)$. pero supongamos que medimos la duración de la batería en días, es decir "discretizamos" el rango de la v.a. y se convierte en $N_o = N \cup \{0\}$. Por tratarse de una v.a. discreta, su función de probabilidad puntual puede representarse mediante un histograma con área total igual a 1. Si medimos la duración en horas, obtenemos un histograma con mayor número de intervalos de menor longitud cada uno, pero que sigue teniendo área total igual a 1.

Si continuamos aumentando la precisión de la medición (minutos, segundos, décimas de segundo, etc), obtenemos como límite de los histogramas una curva suave, y la probabilidad de que la duración de la batería se encuentre entre dos valores a y b (a < b) estará dada por el área bajo la curva entre a y b.



Definición: Una v.a. *X* es *continua* si existe una función

$$f : \Re \rightarrow \Re^+ = [0,\infty)$$

llamada función de densidad de la v.a. *X* tal que

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx \qquad \forall\ A \subseteq \Re$$

En particular, si $A = [a, b]$, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

y $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = 0 \quad \forall a \in \Re.$

Propiedad: Para que una función $f(x)$ sea una función de densidad, debe satisfacer

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Re$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Observación: Nota que $f(x)$ no es una probabilidad, de hecho puede ser mayor que 1. Es simplemente el valor de una función en un punto.

Ejemplo: Sea

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Otra forma de expresar la densidad es $f(x) = a\,x^2\, I_{[1,3]}(x)$, donde la función I se define como

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 a\,x^2 dx = 1 \Leftrightarrow a\int_1^3 x^2 dx = 1 \Leftrightarrow a\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 1 \Leftrightarrow a\frac{26}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{3}{26}.$$

b) Calcular P($X \geq 2$).

$$P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^3 \frac{3}{26} x^2 dx = \frac{3}{26}\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{27-8}{26} = \frac{19}{26}.$$

Definición: La **función de distribución acumulada** de una v.a. continua *X* con función de densidad $f(x)$ se define para todo $x \in \Re$, como

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior, obtengamos la función de distribución acumulada de la v.a. *X*.

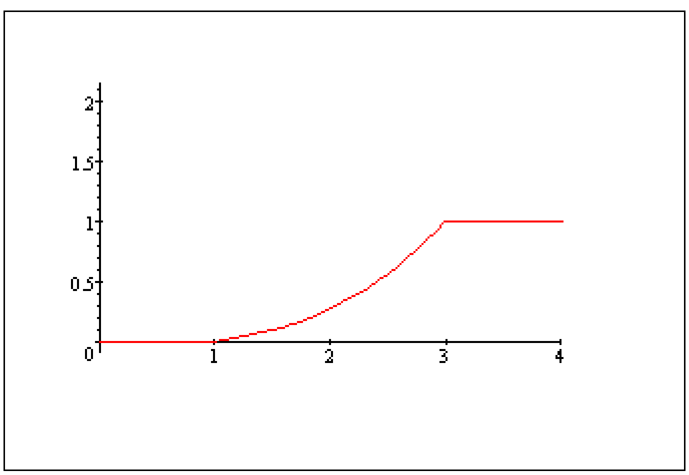
Si $x < 1$, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

Si $1 \le x \le 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{3}{26} t^2 dt = \frac{3}{26} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{1}^{x} = \frac{x^3 - 1}{26}$

Si $x > 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{3} \frac{3}{26} t^2 dt = 1$

Resumiendo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^3 - 1}{26} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



Observamos que se trata de una función continua, no decreciente que toma valores entre 0 y 1.

Propiedades de la función de distribución acumulada: Sea *X* una v.a. continua,

i) $\forall x \in \Re,\ F_X(x) \in [0,1]$.

ii) $F_X(x)$ es monótona no decreciente, es decir que si $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$.

iii) $F_X(x)$ es continua en todo punto.

iv) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Observemos que las propiedades i), ii) y iv) ya las hemos demostrado en general al considerar las v.a. discretas. Respecto a la propiedad iii), en el caso discreto probamos que la función de distribución es continua a derecha en todo punto, mientras que en este caso es continua en todo punto.

Proposición: Sean a y b tales que $a \le b$, entonces

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)\ .$$

Dem: Resulta inmediatamente del hecho que, si *X* es continua, $P(X = x) = 0$

Proposición: Si *X* es una v.a. continua con función de densidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$, entonces en todo punto donde $F(x)$ es derivable,

$$F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$$

Dem: Resulta del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, y de la definición de $F(x)$.

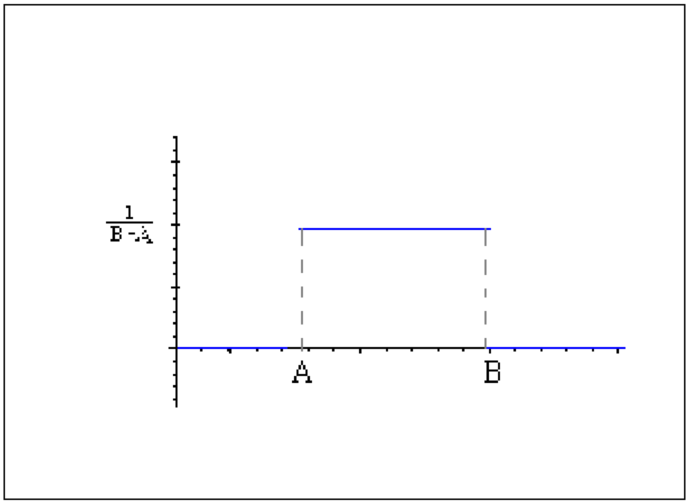
Distribución Uniforme:

Definición: Se dice que *X* tiene distribución Uniforme en el intervalo [*A,B*], si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{B-A} I_{[A,B]}(x)$$

es decir, la densidad es constante sobre el intervalo [*A,B*] y 0 fuera de él. *A* y *B* son los parámetros de la distribución.

Notación: *X* ~ *U* (A,*B*).



<u>Función de distribución</u>: Hallemos la función de distribución acumulada de $X \sim U$ (A,B).

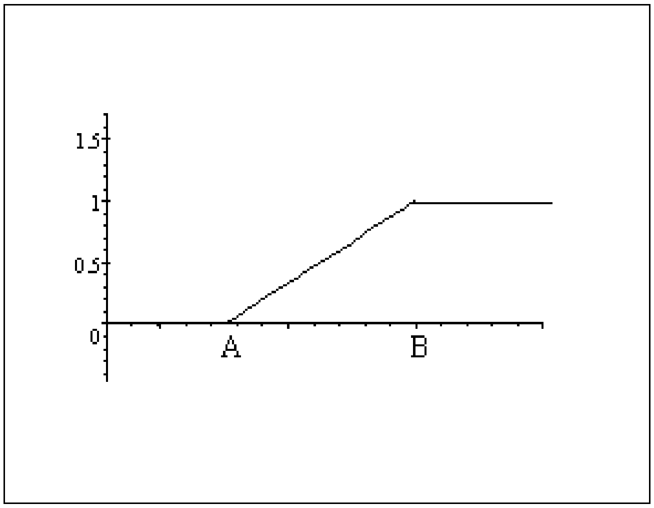
Si $x < A \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$.

Si $A \le x \le B \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{A}^{x} \frac{1}{B-A} dt = \left. \frac{t}{B-A} \right|_{A}^{x} = \frac{x-A}{B-A}$.

Si $x > B \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{A}^{B} \frac{1}{B-A} dt = \left. \frac{t}{B-A} \right|_{A}^{B} = \frac{B-A}{B-A} = 1.$

Resumiendo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < A \\ \frac{x-A}{B-A} & \text{si } A \le x \le B \\ 1 & \text{si } x > B \end{cases}$$



Percentiles de una distribución continua: Sea *X* una v.a. continua con función de densidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$ y sea 0 < *p* < 1, el percentil (100 *p*)-ésimo de la distribución de *X* es el valor x_p tal que

$$F(x_p) = P(X \le x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(t)dt = p$$

Ejemplos: 1) Sea *X* con función de densidad $f(x) = \frac{3}{26} x^2 \; I_{[1,3]}(x)$. Su función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^3 - 1}{26} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Obtengamos el 25-percentil de esta distribución (*p* = 0.25). Buscamos $x_{0.25}$ tal que $F(x_{0.25}) = 0.25$.

$$F(x_{0.25}) = 0.25 \Leftrightarrow \frac{x_{0.25}^3 - 1}{26} = 0.25 \Leftrightarrow x_{0.25} = (0.25 \cdot 26 + 1)^{1/3} = 1.96$$

2) Sea *X* ~ *U* (A,*B*). Su función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < A \\ \dfrac{x-A}{B-A} & \text{si } A \le x \le B \\ 1 & \text{si } x > B \end{cases}$$

Hallemos el 50-percentil de esta distribución (p = 0.50). Buscamos $x_{0.50}$ tal que $F(x_{0.50}) = 0.50$.

$$F(x_{0.50}) = 0.50 \Leftrightarrow \frac{x_{0.50} - A}{B - A} = 0.50 \Leftrightarrow x_{0.50} = 0.50(B - A) + A = \frac{A + B}{2}.$$

El 50-percentil se denomina **mediana** de la distribución.

Esperanza o valor esperado de una v.a. continua:

Definición: Sea *X* una v.a. continua con función de densidad $f(x)$, la **esperanza o valor esperado de *X*** se define como

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

siempre que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x) dx < \infty$. Si esta integral es ∞, la esperanza no puede definirse y decimos que no existe.

Ejemplo: Sea $X \sim U\,(A,B)$,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = \int_{A}^{B} x \frac{1}{B - A} dx = \left. \frac{x^2}{2(B - A)} \right|_A^B = \frac{B^2 - A^2}{2(B - A)} = \frac{A + B}{2}.$$

Proposición: Si la v.a. continua *X* tiene función de densidad $f(x)$, entonces la esperanza de cualquier función real *h(X)*, está dada por

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f(x)dx < \infty$.

Propiedad (*Linealidad*): Si a y b son constantes reales, $E(aX+b) = aE(X)+b$.

Dem: Sea $h(X) = aX + b$, entonces

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = aE(X)+b.$$

Ejemplo: Dos especies compiten en una región para controlar una limitada cantidad de cierto recurso. sea *X*: proporción del recurso controlada por la especie 1. Supongamos que *X* ~ *U* (0,*1*), es decir

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Este modelo de asignación de recursos se denomina “broken stick” o “vara rota” ya que es análogo a quebrar una vara en un punto aleatorio. La especie que controla la mayoría del recurso, controla la cantidad.

Sea $h(X) = \max(X, 1-X) = \begin{cases} 1-X & \text{si } 0 \le X < \frac{1}{2} \\ X & \text{si } \frac{1}{2} \le X \le 1 \end{cases}$

El valor esperado para la cantidad controlada por la especie que más controla es:

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \max(x,1-x)\, f(x)dx = \int_{0}^{1/2} (1-x) f(x)dx + \int_{1/2}^{1} x\, f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{1/2} (1-x)\; dx + \int_{1/2}^{1} x\, dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Varianza de una v.a. continua:

Definición: Sea *X* una v.a. continua con esperanza μ_X y densidad $f(x)$, la **varianza de *X***, que se denotará *V(X)*, σ_X^2 ó σ^2, es

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx$$

y el **desvío standard de *X***, es $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$.

Proposición: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Dem:

$$V(X) = E\left((X-\mu_X)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\mu_X + \mu_X^2) f(x)\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu_X \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = E(X^2) - 2\mu_X\mu_X + \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

como queríamos demostrar.

Ejemplos: Sea *X* ~ *U* (A,*B*), hemos demostrado que $E(X) = \frac{A+B}{2}$, es decir el punto medio del intervalo. Hallemos la varianza de *X.* Como $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, necesitamos calcular $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\; f(x)dx = \int_A^B x^2\, \frac{1}{\mathrm{B - A}}\, dx = \left.\frac{x^3}{3(B-A)}\right|_A^B = \frac{B^3 - A^3}{3(B-A)} = \frac{(B-A)(B^2 + AB + A^2)}{3(B-A)} =$$

$$= \frac{(B^2 + AB + A^2)}{3}$$

Entonces,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(B^2 + AB + A^2)}{3} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4(B^2 + AB + A^2) - 3(A^2 + 2AB + B^2)}{12} = \frac{B^2 - 2AB + A^2}{12} = \frac{(B-A)^2}{12}.$$

Por lo tanto, $V(X) = \dfrac{(B-A)^2}{12}$.

<u>Propiedad de la varianza y del desvío standard</u>: Sea X una v.a. continua con densidad $f(x)$,

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \quad \text{y} \quad \sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X .$$

Dem: : Observemos que, en general,

$$V(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(h(x) - E(h(X))\right)^2 f(x)dx$$

entonces, si $h(x) = ax + b$,

$$V(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(ax+b) - E(aX+b)\right]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ax + b - aE(X) - b\right]^2 f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ax - aE(X)\right]^2 f(x)dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f(x)dx = a^2 V(X),$$

como queríamos demostrar.

Obviamente, $\sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$.