Variables aleatorias discretas

Distribución Binomial:

Muchos experimentos aleatorios satisfacen las siguientes condiciones:

- El experimento consiste de *n* pruebas, siendo *n* fijo.
- Las pruebas son idénticas y en cada prueba hay sólo dos resultados posibles, que denominaremos Éxito (E) y Fracaso (F). Una prueba de este tipo se denomina **ensayo de Bernoulli**.
- Las pruebas son independientes, es decir que el resultado de una prueba no influye sobre el de las otras.
- La probabilidad de Éxito (P(E)=p) se mantiene constante en todas las pruebas.

Definición: Un experimento que satisface estos cuatro requerimientos se denomina **experimento Binomial.**

Ejemplos: 1) Se arroja una moneda *n* veces y se llama Éxito al suceso "sale cara".

2) Se arroja un dado equilibrado *n* veces y se llama Éxito al suceso "se obtiene un as".

3) Se arroja n veces un dardo a un blanco circular de radio R, el cuál contiene en el centro un círculo de radio R/4 y se denomina Éxito al suceso "el dardo impacta en el círculo central".

4) Se extraen 4 bolillas *con reposición* de una urna que contiene 5 bolillas blancas y 3 negras y se denomina Éxito al suceso "las 4 bolillas son blancas".

5) ¿Es el que sigue un experimento Binomial? Se extraen 2 bolillas *sin reposición* de una urna que contiene 5 bolillas blancas y 3 negras y se denomina Éxito al suceso "la bolilla extraída es blanca".

NO, no lo es ya que si denominamos B_i al suceso "la i-ésima bolilla extraída es blanca",

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{7} \neq P(B_2) = \frac{5}{8}$$

y, por lo tanto no se verifica la tercera condición. En realidad tampoco se verifica la segunda ya que las pruebas no son idénticas (la composición de la urna varía). Observemos que, sin embargo la cuarta condición se satisface.

Variable aleatoria binomial: Consideremos un experimento binomial que consiste de *n* repeticiones y en el cual *P(E) = p.* Denominaremos v.a. binomial a la variable

X: número de éxitos en las *n* repeticiones.

Notación: $X \sim$ Bi (n,p).

Calculemos su <u>función de probabilidad puntual</u>. Para ello, observemos en primer lugar que $R_X = \{0,1,2,...,n\}$.

Sea $k \in R_X$, una secuencia posible con k éxitos y n-k fracasos es:

$$\underbrace{E...E}_{k}\underbrace{F...F}_{n-k}$$

y su probabilidad, dada la independencia de las repeticiones, es $p^k(1-p)^{n-k}$. Pero, hay $\binom{n}{k}$ secuencias posibles conteniendo k éxitos, entonces

$$P(X=k) = p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \forall\, k \in \{0,1,...,n\}$$

Verifiquemos que $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$. En efecto,

$$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(p + (1-p)\right)^n = 1^n = 1.$$

Hemos usado la fórmula del Binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

<u>Función de distribución</u>: Si $X \sim$ Bi (n,p),

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \le x \le n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

donde [*x*] denota la parte entera de *x*.

<u>Ejemplo</u>: Supongamos que se arroja un dado equilibrado *10* veces y se llama Éxito al suceso “se obtiene un as”. La v.a.

X: número de ases en los 10 tiros

tiene distribución Binomial de parámetros 10 y 1/6, o sea $X \sim$ Bi (*10,1/6*), entonces

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.054$$

$$P(3 \le X \le 5) = \sum_{k=3}^{5} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = F_X(5) - F_X(2) = 0.22$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria binomial: Sea $X \sim$ Bi (n,p),

$$E(X) = np \qquad \text{y} \qquad V(X) = np(1-p)$$

Dem: En el caso n=1, X es una v.a. Bernoulli y ya hemos demostrado que en este caso, $E(X)=p$ y $V(X) = p(1-p)$. Sea ahora n>1,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{\text{n!}}{\text{k!(n - k)!}} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \underset{(k-1)=j}{=} np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = np\,\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = np.$$

Recordemos que $V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 = E\left(X^2\right) - n^2 p^2$.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \big(k(k-1) + k\big) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + E(X)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np$$

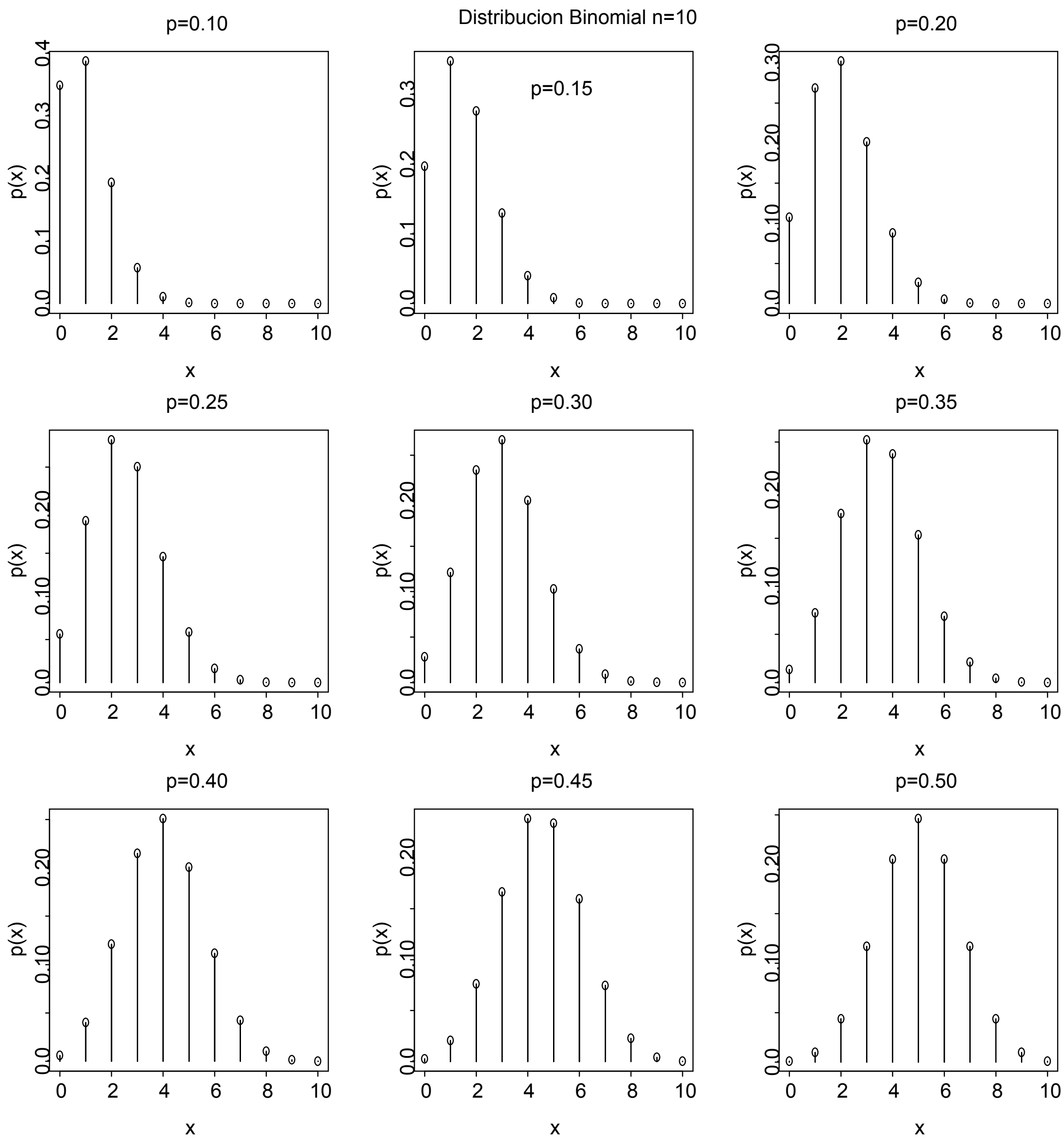
$$\underset{(k-2)=j}{=} n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{n-2-j} + np = n(n-1)p^2 \big(p + (1-p)\big)^{n-2} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

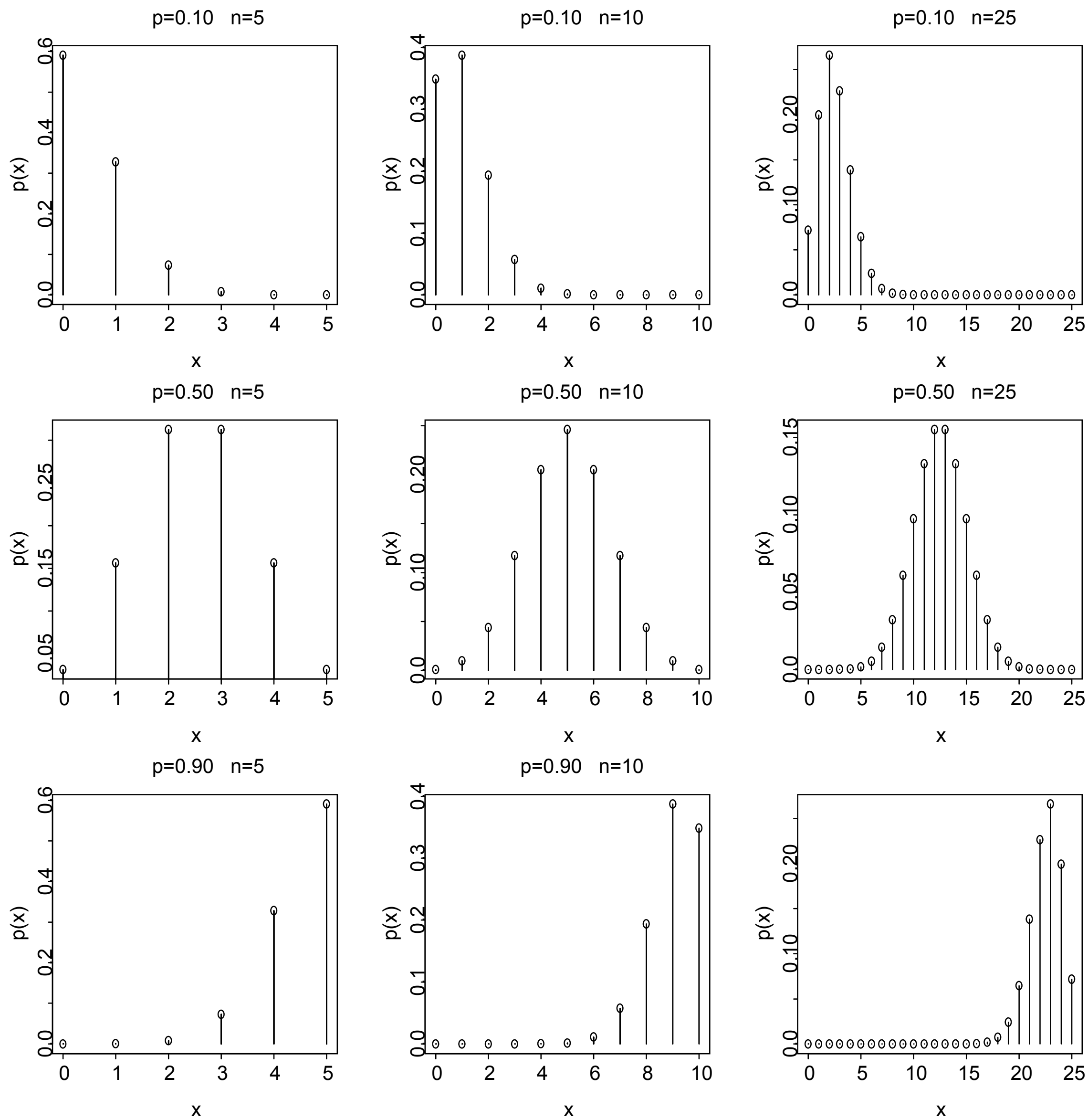
En realidad, para que la demostración anterior sea válida debe ser n $\geq$ 2, pero es inmediato verificar que, si n=2, $E(X^2)=2p^2+2p$ y por lo tanto la expresión hallada es válida para todo n.
Finalmente,

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=-np^2+np=np(1-p)$$

En el siguiente gráfico se muestra la función de probabilidad puntual correspondiente a la distribución Binomial para distintos valores de p y n=10. Puede observarse cómo la distribución se simetriza a medida que p tiende a 0.5.
¿Cómo serían los gráficos para valores de p>0.5?



En el siguiente gráfico se muestra la función de probabilidad puntual correspondiente a la distribución Binomial para distintos valores de p y n.



<u>Variable aleatoria Geométrica:</u> Supongamos que se repite en forma independiente un **ensayo de Bernoulli** con probabilidad de Éxito (P(E)=p) constante en todas las pruebas. Se define la v.a.

X: número de repeticiones hasta obtener el primer Éxito.

<u>Notación</u>: *X* ~ *G* (*p*).

Al estudiar en general las v.a. discretas, hemos probado que la <u>función de probabilidad puntual</u> de X está dada por

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}\,p \qquad \forall k \in N.$$

y su <u>función de distribución</u> acumulada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-(1-p)^{[x]} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Esperanza y varianza de una variable aleatoria geométrica: Sea *X* ~ *G* (*p*),

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{y} \qquad V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Dem: Lo hemos demostrado al estudiar en general la esperanza y la varianza de una v.a. discreta.

<u>Proposición (Propiedad de Falta de Memoria)</u>: Sea *X* ~ *G* (*p*) y sean *n* y *m* números naturales cualesquiera,

$$P(X > n+m \mid X > n) = P(X > m)$$

Dem: Ejercicio.
(Sugerencia: Demostrar que si *X* ~ *G* (*p*), $P(X > k) = (1-p)^k$).

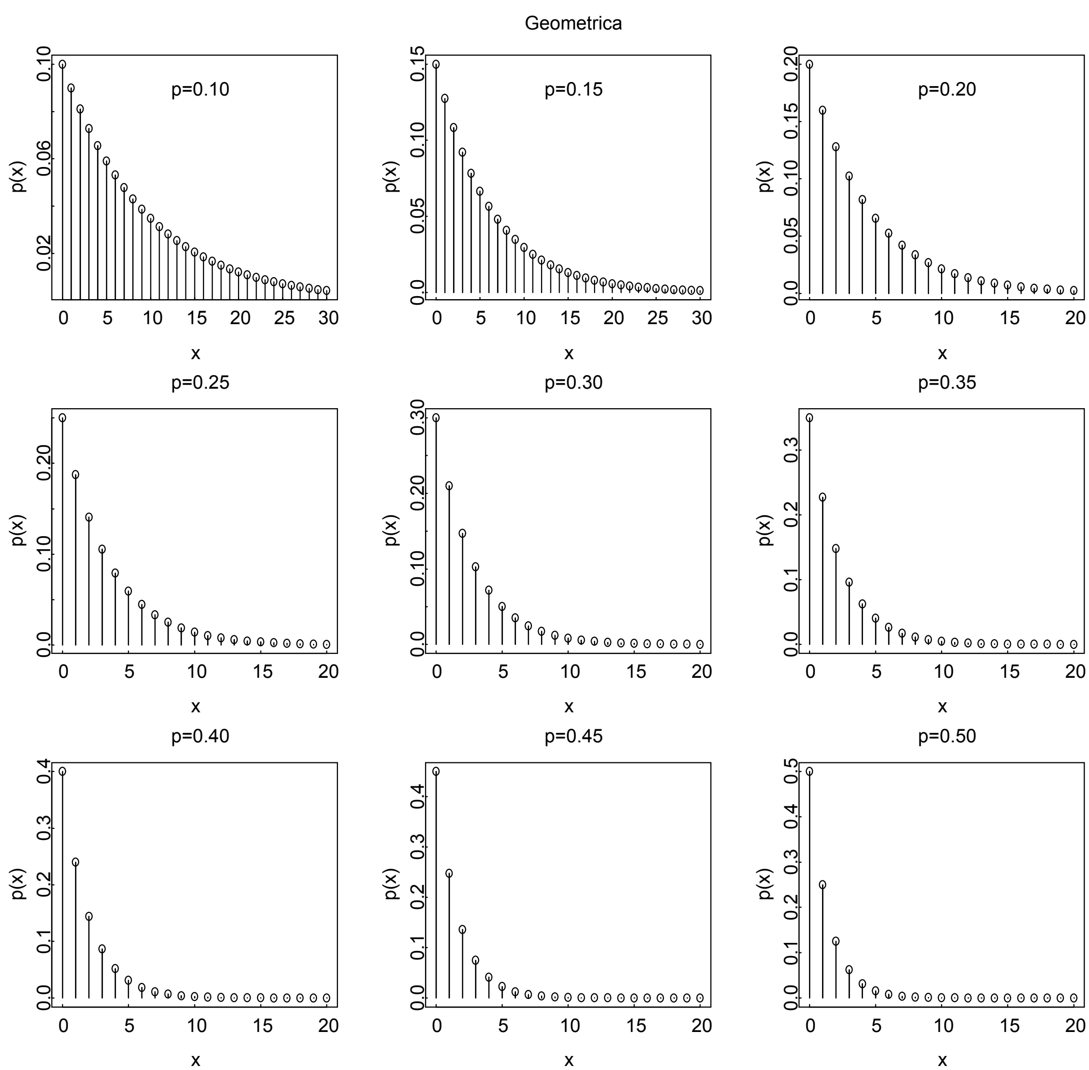
<u>Ejemplo</u>: Sea *X*: "número de tiros hasta obtener el primer as en una sucesión de tiros de un dado equilibrado", entonces *X* ~ *G* (*1/6*).

$$P(X=7)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}=0.06$$

$$P(X\geq 6)=P(X>5)=\left(\frac{5}{6}\right)^{5}=0.40$$

$$E(X)=\frac{1}{1/6}=6 \qquad V(X)=\frac{5/6}{(1/6)^{2}}=30$$

En el siguiente gráfico se muestra la función de probabilidad puntual correspondiente a la distribución Geométrica para distintos valores de p.



Variable aleatoria Binomial Negativa: Supongamos que se repite en forma independiente un **ensayo de Bernoulli** con probabilidad de Éxito (P(E)=p) constante en todas las pruebas. Se define la v.a.

X: número de repeticiones hasta obtener el *r*-ésimo Éxito ($r \geq 1$).

Notación: *X* ~ *BN* (*r*,*p*).

Esta v.a. es una generalización de la v.a. Geométrica, la cual corresponde al caso *r* = 1.

Observemos que $R_X = \{r, r+1, r+2, ...\}$ y hallemos su función de probabilidad puntual.

Sea *k* un número natural, $k \geq r$. Para que sean necesarias *k* repeticiones para obtener el primer Éxito, el *r*-ésimo Éxito debe ocurrir en la repetición *k* y en las (*k*-1) repeticiones previas debe haber exactamente (*k*-1) Éxitos. Como las repeticiones son independientes la probabilidad de una configuración de ese tipo es $p^r(1-p)^{k-r}$, pero hay varias configuraciones de esta forma. ¿Cuántas? Tantas como formas de elegir entre las (*k*-1) primeras repeticiones, aquellas donde ocurrirán los (*r*-1) Éxitos, o sea $\binom{k-1}{r-1}$.

Por lo tanto la función de probabilidad puntual será:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \qquad \forall\, k \in \{r, r+1, r+2, ...\}$$

Función de distribución: Si *X* ~ *BN* (*r*,*p*),

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<r \\ \sum_{k=r}^{[x]}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} & \text{si x} \geq \text{r} \end{cases}$$

donde [*x*] denota la parte entera de *x*.

Ejemplo: Se extraen con reposición bolillas de una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 rojas. Se define *X*: número de extracciones hasta obtener la cuarta bolilla roja.

$$X \sim BN\,(4,7/10)$$

$$P(X=5)=\binom{5-1}{4-1}\left(\frac{7}{10}\right)^4\left(\frac{3}{10}\right)=0.29$$

$$P(5 \leq X \leq 7) = \sum_{k=5}^{7} \binom{k-1}{3} \left(\frac{7}{10}\right)^4 \left(\frac{3}{10}\right)^{k-4} = 0.49$$

Proposición: Sea $X \sim BN\ (r,p)$,

$$E(X) = \frac{r}{p} \qquad\qquad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Dem: Lo demostraremos más adelante usando que una v.a. Binomial Negativa puede expresarse como suma de v.a. Geométricas independientes.

Observación: Esta v.a. suele también definirse como el número de Fracasos antes de obtener el r-ésimo Éxito. Si la denotamos X, entonces su rango será

$$R_{X^*} = \{0,1,2,...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y su función de probabilidad puntual: $p_{X^*}(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$

En este caso,

$$E(X^*) = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{y} \quad V(X^*) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Variable aleatoria Hipergeométrica: Supongamos que

- La población a ser muestreada consiste de N elementos o individuos (población finita)
- Cada elemento o individuo puede ser clasificado como Éxito o Fracaso y hay D Éxitos en la población.
- Se extrae de la población una *muestra* de n elementos o individuos, de forma tal que cualquier *subconjunto* de tamaño n tiene la misma probabilidad de ser elegido.

Sea X : número de éxitos en la muestra de tamaño n. Se dice que X tiene distribución Hipergeométrica de parámetros n, N y D y se denota

$$X \sim H\ (n,N,D)$$

Ejemplo: De una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 negras se extraen 4 bolillas *sin reposición* y se define X: número de bolillas blancas extraídas.

¿Cómo calcularíamos la probabilidad de que se extraigan 2 bolillas blancas ($X = 2$)?

Como todos los conjuntos de 4 bolillas tienen la misma probabilidad de ser extraídos, la probabilidad de uno cualquiera de ellos será $\frac{1}{\binom{10}{4}}$. Por otro lado hay $\binom{3}{2}\binom{7}{2}$ conjuntos que contienen 2 bolillas blancas y 2 negras y, por lo tanto la probabilidad pedida será:

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{3\cdot 21}{210}=\frac{3}{10}.$$

<u>Proposición</u>: Si $X \sim H\,(n,N,D)$,

$$p_X(k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \max\big(0,n-(N-D)\big)\le k\le \min\big(n,D\big)$$

Dem: El número de subconjuntos distintos de tamaño n que se pueden extraer de una población de tamaño N es $\binom{N}{n}$. De esos conjuntos, hay $\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}$ que contienen k Éxitos y $(n-k)$ Fracasos y se obtiene la función de probabilidad. El rango de valores posibles de k resulta de observar que se deben satisfacer tres condiciones:

$$0\le k\le n \qquad k\le D \qquad \text{n - k} \le \text{N - D}$$

De las dos primeras se obtiene: $k\le n, k\le D \Leftrightarrow k\le \min(n,D)$

De la primera y la tercera se obtiene: $k\ge 0, k\ge n-(N-D) \Leftrightarrow k\ge \max\big(0,n-(N-D)\big)$.

<u>Proposición</u>: Si $X \sim H\,(n,N,D)$,

$$E(X)=n\frac{D}{N} \qquad V(X)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)$$

Dem: Ejercicio opcional.

Observaciones: 1) El factor $\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$ que aparece en la expresión de la varianza se denomina factor de corrección por población finita.

2) Si *n* es pequeño en relación a *N*, la hipergeométrica puede ser aproximada por la distribución Binomial de parámetros *n* y *p=D/N*. Observemos que, en este caso el factor de corrección finita es aproximadamente 1.

Límite de la función de probabilidad puntual de una v.a. Binomial:

Proposición: Sea *X* ~ *Bi*(*n,p*) y supongamos que $n \to \infty$ y $p \to 0$, de manera que $n \cdot p = \lambda$ (fijo), entonces:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n.k} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \forall k \in N_o = N \cup \{0\}$$

Dem:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \left[\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}....\frac{n-k+1}{n}\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Observemos que:

$$1 \cdot \frac{n-1}{n}....\frac{n-k+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Entonces, $p_X(k) \longrightarrow \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, como queríamos demostrar.

Esta proposición sugiere que la función de probabilidad puntual podría ser aproximada por la función de probabilidad límite, pero ¿cuándo se considera que n es grande y p es pequeño para que la aproximación sea buena?

Algunos autores sugieren $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ y $np \leq 20$.

En la siguiente tabla se presentan a modo de ejemplo, algunos valores exactos de la probabilidad y su aproximación para el caso $X \sim Bi\ (100, 1/36)$

k	Prob. exacta (Binomial)	Aproximación
0	0.0598	0.0622
1	0.1708	0.1727
2	0.2416	0.2399
5	0.0857	0.0857
8	0.0049	0.0055
9	0.0014	0.0017
10	0.0004	0.0005

Como se observa, la aproximación es bastante buena, aún cuando no se cumple la condición $p \leq 0.01$.

<u>Variable aleatoria Poisson:</u> Una v.a. cuya función de probabilidad puntual es la obtenida en la proposición anterior, se dice que tiene distribución de Poisson de parámetro λ ($\lambda > 0$), y se nota $X \sim P(\lambda)$.

Es decir, $X \sim P(\lambda)$ si su <u>función de probabilidad puntual</u> está dada por:

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \forall\, k \in N_o = N \cup \{0\}$$

Verifiquemos que es, en efecto, una función de probabilidad puntual:

Es obvio que $p_X(k) \geq 0 \quad \forall k$.

Por otra parte

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

ya que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ es el desarrollo en serie de e^x.

Ejemplo: Sea X: "número de mensajes rechazados por segundo por un servidor", y supongamos que $X \sim P(5)$.

a) Calcular la probabilidad de que se rechacen exactamente 2 mensajes en un segundo.

$$P(X=2)=\frac{e^{-5}5^2}{2!}=0.084$$

b) Calcular la probabilidad de que se rechacen a lo sumo 2 mensajes en un segundo.

$$P(X\leq 2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{e^{-5}5^k}{k!}=e^{-5}\left(1+5+\frac{5^2}{2}\right)=0.125$$

Proposición: Si $X \sim P(\lambda)$, entonces

$$E(X)=\lambda \qquad \text{y} \qquad V(X)=\lambda$$

Dem:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}=\lambda.$$

Por otra parte,

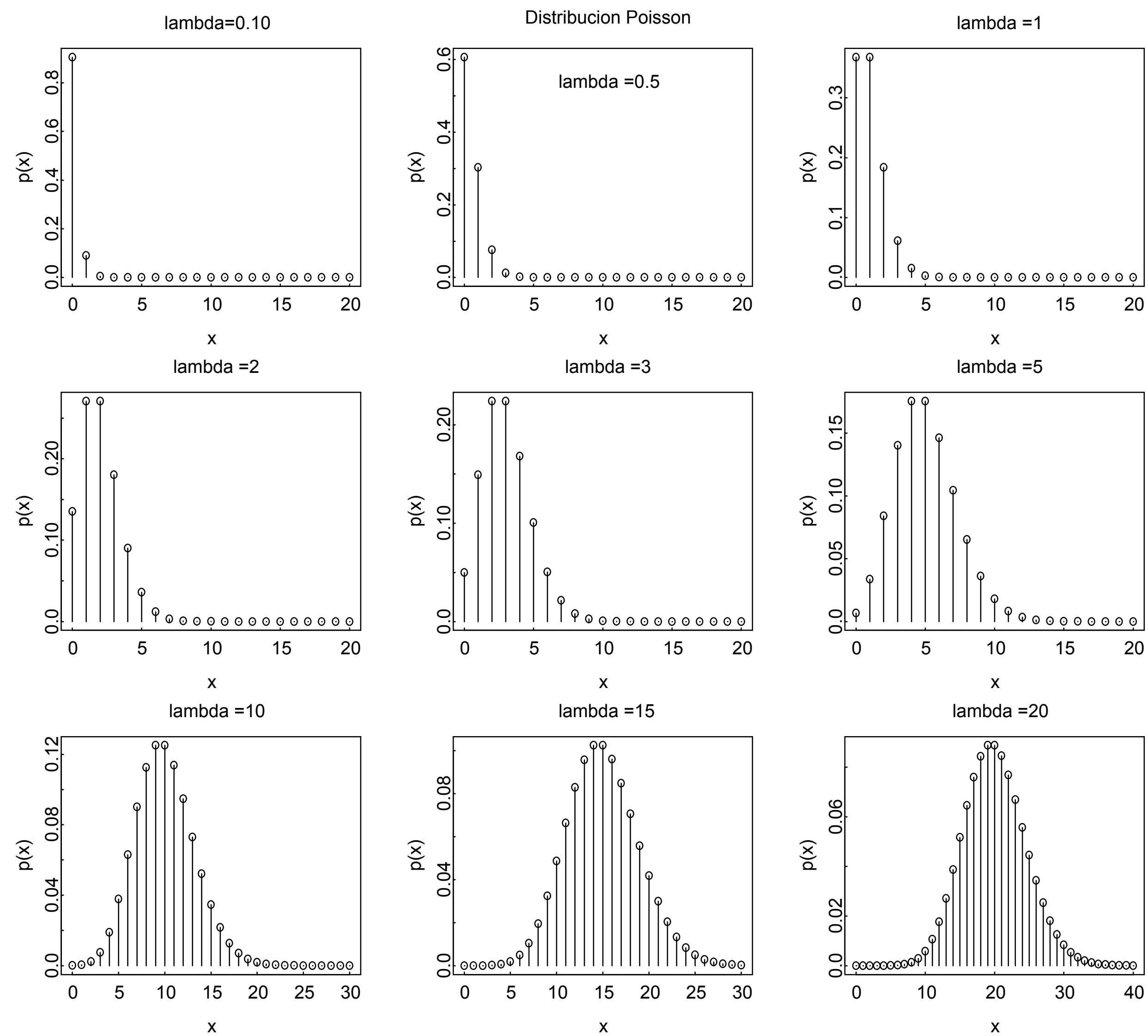
$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\big(k(k-1)+k\big)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=$$

$$=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+E(X)=\lambda^2\sum_{j=0}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

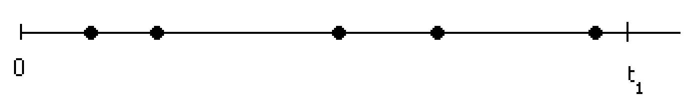
Entonces

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

En el siguiente gráfico se muestra la función de probabilidad puntual correspondiente a la distribución de Poisson para distintos valores de λ. En él puede observarse cómo la distribución se simetriza alrededor de λ a medida que este parámetro crece.



Proceso de Poisson: Una aplicación importante de la distribución de Poisson surge en relación con la ocurrencia de eventos a lo largo del tiempo, por unidad de área, por unidad de volumen, etc. En lo que sigue nos referiremos, sin pérdida de generalidad a ocurrencias de un evento a lo largo del tiempo, que podremos esquematizar en la forma:



A partir del instante 0 y hasta el momento t_1 ocurrieron 5 eventos.

Imaginemos que dividimos el intervalo (0, t_1) en un número muy grande de pequeños subintervalos, de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

- La probabilidad de que ocurra un evento en un subintervalo es proporcional a la longitud del subintervalo.
- La probabilidad de que ocurra más de un evento en un subintervalo es despreciable con respecto a la probabilidad de que ocurra uno.
- La ocurrencia de un evento en un subintervalo es independiente de lo que ocurre en otro subintervalo disjunto.

En particular, si todos los intervalos son de igual longitud t_1/n, la v.a. X_{t_1} : "número de eventos que ocurren en el intervalo (0, t_1)" es "casi" binomial, siendo Éxito la ocurrencia de un evento en cada uno de los subintervalos y p = P(Éxito)=probabilidad de que ocurra un evento. Si el número de subintervalos es suficientemente grande y por lo tanto el p suficientemente pequeño, por el resultado límite que hemos probado, la variable X_{t_1} tiene distribución de Poisson.

Ejemplos: 1) Mensajes de correo electrónico que llegan a una casilla de correos.

2) Emisión de partículas por una sustancia radioactiva.

3) Accidentes que ocurren en un cruce de ruta.

4) Número de errores en una página de un libro.

5) Número de larvas de cierto insecto en un terreno.

Ejercicio: Para cada uno de estos ejemplos, discutir en que situaciones se verifican las tres condiciones enunciadas.

Definición: Supongamos que se observa la ocurrencia de un evento a lo largo del tiempo y que existe una cantidad positiva $\theta > 0$, tal que

1) La probabilidad de que ocurra exactamente un evento en un intervalo pequeño de longitud Δt es aproximadamente igual a $\theta\, \Delta t$, es decir:

$$P(\text{ocurra un evento en } \Delta t) = \theta\, \Delta t + o(\Delta t)$$

siendo o(h) una función g(h) tal que $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.

2) La probabilidad de que ocurra más de un evento en un intervalo pequeño de longitud Δt es despreciable cuando se la compara con la probabilidad de que ocurra un evento, es decir:

$$P(\text{ocurra más de un evento en } \Delta t) = o(\Delta t)$$

3) El número de eventos que ocurren en un intervalo es independiente del número de eventos que ocurren en otro intervalo disjunto.

Entonces, el número de ocurrencias del evento en un periodo de longitud *t* tiene distribución de Poisson de parámetro (θ t), es decir que la v.a. X_t: "número de ocurrencias del evento en el intervalo de longitud t" satisface

$$X_t \sim P(\theta\, t)$$

<u>Observaciones</u>: 1) ¿Cómo se interpreta la cantidad θ?

Puede interpretarse como la tasa media a la cual ocurren los eventos en la unidad de tiempo. Se la suele llamar <u>tasa media de ocurrencia</u> o <u>intensidad</u> del Proceso de Poisson.

2) ¿Cuál es la diferencia entre un Proceso de Poisson y una v.a. con distribución Poisson?

La definición anterior, que en realidad es un teorema, da las condiciones bajo las cuáles ciertos experimentos aleatorios que producen como resultados eventos en el tiempo (o en longitud, área, volumen, etc) pueden ser modelados mediante la distribución de Poisson. Consideremos los ejemplos 1) a 5). Sólo bajo ciertas condiciones, satisfacen las propiedades de un Proceso de Poisson.

<u>Ejemplo</u>: Supongamos que el número de mensajes de correo electrónico que llegan a una casilla de correos sigue un proceso de Poisson de intensidad θ = 2 mensajes / minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba ningún mensaje entre las 12 hs y las 12:03 hs?

Sea X_3: "número de mensajes en un periodo de 3 minutos", $X_3 \sim P(2 \cdot 3) = P(6)$.

Entonces, $P(X_3 = 0) = e^{-6} = 0.002$

b) ¿Cuál es el número esperado de mensajes en media hora?

Sea X_{30}: "número de mensajes en un periodo de 30 minutos"

$$X_{30} \sim P(2 \cdot 30) = P(60) \Rightarrow E(X_{30}) = 60$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba ningún mensaje entre las 13:30 hs y las 13:33 hs?

La respuesta es la misma del ítem a) porque la distribución depende sólo de la longitud del intervalo y no de su ubicación.