Variables aleatorias continuas

Distribución Uniforme: Recordemos que *X* tiene distribución uniforme en el intervalo [*A,B*], si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{B-A} I_{[A,B]}(x)$$

Notación: $X \sim U\,(A,B)$.

Su función de distribución acumulada está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < A \\ \dfrac{x-A}{B-A} & \text{si } A \le x \le B \\ 1 & \text{si } x > B \end{cases}$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria uniforme: Sea $X \sim U\,(A,B)$, hemos demostrado que

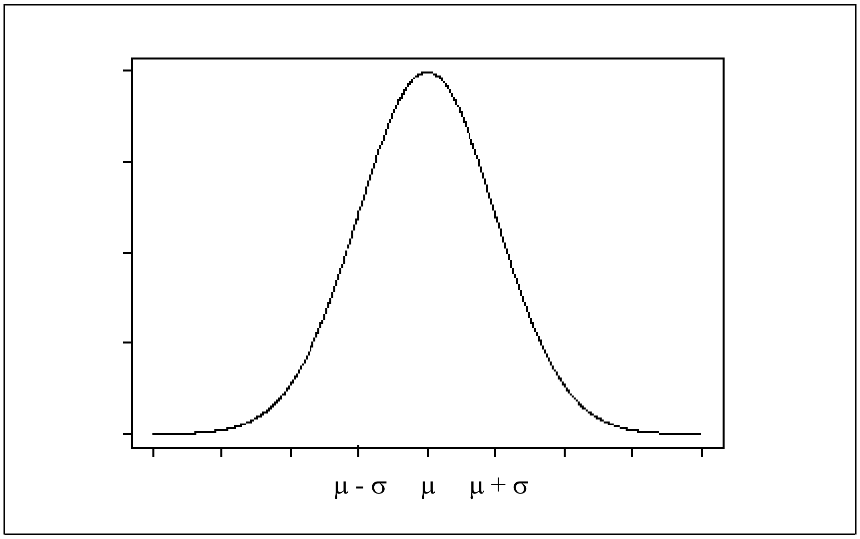
$$E(X) = \frac{A+B}{2} \qquad \text{y} \qquad V(X) = \frac{(B-A)^2}{12}.$$

Distribución Normal: Se dice que *X* tiene distribución Normal de parámetros μ y σ^2 $(\mu \in \Re, \sigma > 0)$ si su función de densidad es

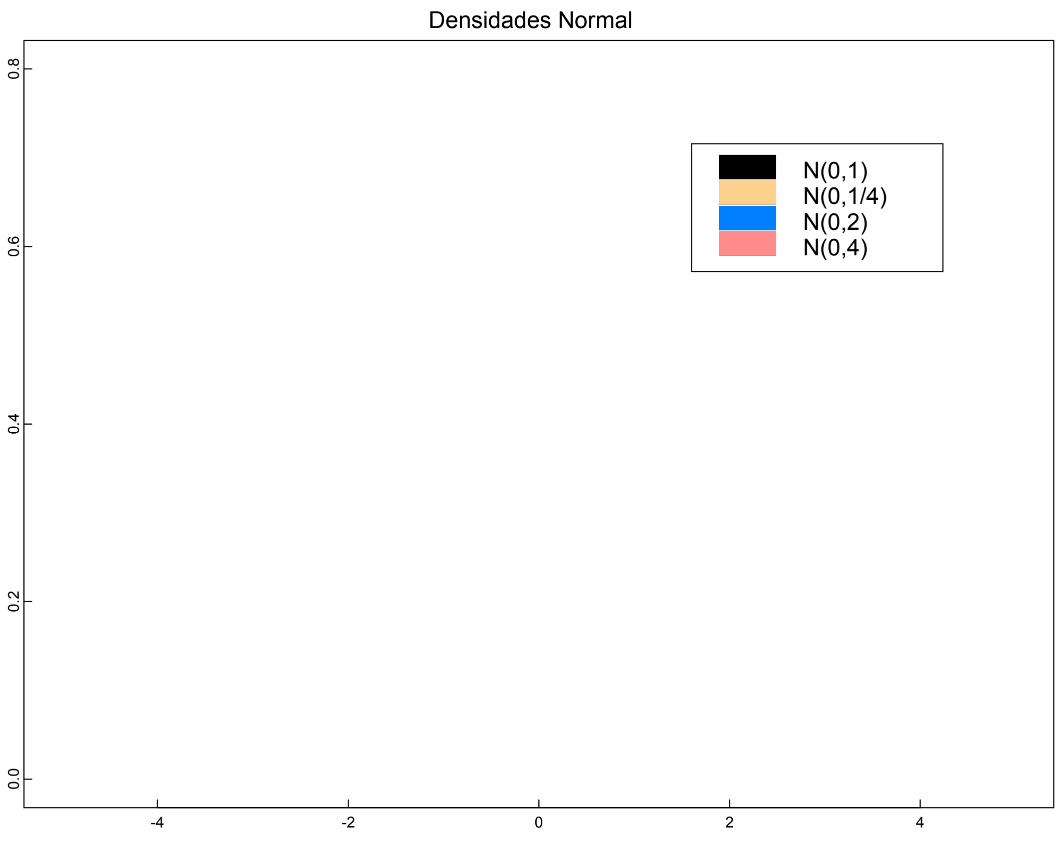
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \tag{1}$$

Notación: $X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$.

El gráfico de la función de densidad normal tiene forma de campana con eje de simetría en $x = \mu$ y puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.



En esta distribución, μ indica la posición de la curva y σ es el parámetro de dispersión. En el siguiente gráfico se muestran densidades correspondientes a μ=0 y distintos valores de σ.



La importancia de la distribución normal radica no sólo en que frecuentemente en la práctica se hallan variables que tienen esta distribución (por ejemplo, los errores de medición) sino porque, bajo ciertas condiciones, suele ser una buena aproximación a la distribución de otras variables aleatorias.

Se puede verificar que en efecto la función (1) es una función de densidad, es decir que la integral sobre toda la recta es 1. No lo haremos, pero sí verificaremos que su gráfico es simétrico respecto de μ, punto en el cual alcanza su único máximo y que tiene puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

Probemos en primer lugar que la densidad es simétrica respecto de μ, o sea que

$$f(\mu - x) = f(\mu + x) \qquad \forall\, x$$

En efecto,

$$f(\mu - x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu - x - \mu)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(\mu + x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu + x - \mu)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

y, por lo tanto, se verifica la igualdad.

Observemos ahora que la densidad alcanza un único máximo en $x = \mu$.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\right] = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, \frac{1}{\sigma^2}(x - \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x - \mu) = 0\ \Leftrightarrow\ x = \mu.$$

<u>Ejercicio</u>: Verificar que la derivada segunda en $x = \mu$ es menor que 0 y por lo tanto se trata de un máximo y que la densidad tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

Distribución Normal Standard: Se dice que Z tiene distribución normal standard si sus parámetros son $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, es decir $Z \sim N(0,1)$. Su función de densidad estará dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Su función de distribución, que se notará $\Phi(z)$, es:

$$\Phi(z) = F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Esta función está tabulada, ya que su integral no tiene una expresión analítica conocida.

Ejemplo: $Z \sim N(0,1)$,

$P(Z \leq 1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944$

$P(Z > 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$

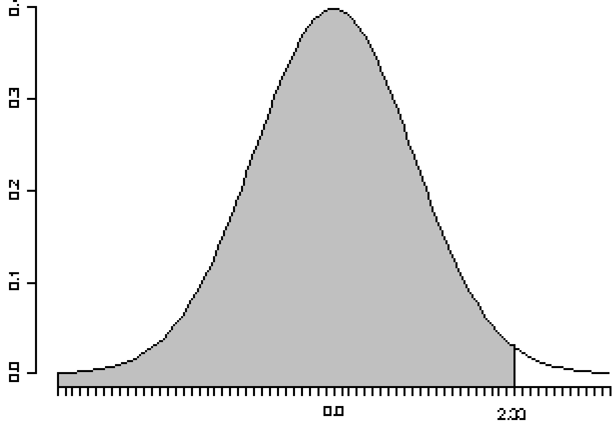
$P(-0.38 \leq Z \leq 1.25) = \Phi(1.25) - \Phi(-0.38) = 0.5424$

Percentiles de la distribución Normal Standard: Sea $0 < p < 1$, el percentil $(100\,p)$-ésimo de la distribución normal standard es el valor z tal que

$$\Phi(z) = p,$$

es decir, es el valor que deja a su izquierda un área igual a p.

Ejemplo: $Z \sim N(0,1)$, el percentil 99 de la distribución es 2.33 ya que $\Phi(2.33) = 0.99$.



Propiedades de la distribución Normal:

1) Si $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Dem:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) = P\big(X \le \sigma\, z + \mu\big) = F_X(\sigma\, z + \mu)$$

Como F_Z es derivable en todo punto,

$$f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_X(\sigma\, z + \mu) = f_X(\sigma\, z + \mu)\,\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma\, z+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

y, por lo tanto *Z* ~ N(0,1) como queríamos demostrar.

2) Si $Z \sim N(0,1)$ y $\sigma > 0 \Rightarrow X = \sigma\, Z + \mu \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Dem: Ejercicio.

3) Sean $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ y $Z \sim N(0,1)$. Si denotamos x_p y z_p a los 100 p-ésimos percentiles de *X* y *Z* respectivamente,

$$x_p = \sigma\, z_p + \mu$$

Dem: El 100 p-ésimo percentil de *X* es el valor x_p tal que $F(x_p) = p$.

$$F(x_p) = p \Leftrightarrow P(X \le x_p) = p \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = p \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_p-\mu}{\sigma} = z_p \Leftrightarrow x_p = \sigma\, z_p + \mu\ .$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria normal: Hallaremos inicialmente la esperanza y la varianza de la distribución normal standard y luego, utilizando propiedades ya demostradas, hallaremos la esperanza y la varianza de una distribución normal en general.

Proposición: Sea Z ~ N(0, 1), entonces E(Z) = 0 y V(Z) = 1.

Dem:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

pues el integrando es una función integrable e impar.

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Aplicando integración por partes, con

$$u = z \qquad dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad du = dz \qquad v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

se obtiene

$$V(Z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-M}^{M} \right) + 1\,.$$

Aplicando la regla de L'Hospital,

$$\lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{M}{e^{\frac{M^2}{2}}} \right) = \lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M\, e^{\frac{M^2}{2}}} \right) = 0$$

y

$$\lim_{M \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{M}{e^{\frac{M^2}{2}}} \right) = \lim_{M \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M\, e^{\frac{M^2}{2}}} \right) = 0$$

y, por lo tanto, V(Z) = 1.

Proposición: Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.

Dem: Recordemos que, si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Como $E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0$, por linealidad de la esperanza,

$$\frac{1}{\sigma}\big(E(X) - \mu\big) = 0 \Rightarrow E(X) = \mu.$$

Como $V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1$, por propiedades de la varianza,

$$\frac{1}{\sigma^2} V(X) = 1 \Rightarrow V(X) = \sigma^2 .$$

Distribución Gamma: Se trata de una familia de distribuciones que provee un modelo adecuado para histogramas que presentan cierto tipo de asimetría. Antes de presentar a las v.a. con distribución Gamma, es necesario recordar cómo se define la función Gamma o factorial, la cual cumple un rol importante en muchas ramas de la Matemática..

Definición: Dado $\alpha > 0$, se define la función Gamma o función factorial como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

Propiedades:

1) Si $\alpha > 1$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1)$

2) Si $\alpha \in N$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Dem: 1) Sea $\alpha > 1$. Aplicando integración por partes con $u = x^{\alpha-1}$ y $dv = e^{-x} dx$,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx = -\, x^{\alpha-1}\, e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (\alpha-1)x^{\alpha-2}\, e^{-x}\, dx =$$

$$= -\lim_{M\to\infty} \frac{M^{\alpha-1}}{e^{M}} + 0 + (\alpha-1)\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)-1}\, e^{-x}\, dx = 0 + 0 + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

2) Ejercicio.

3)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\, e^{-x}\, dx$$

Aplicaremos el siguiente cambio de variable: $u=\sqrt{2x}$, con lo cual $du=\frac{2}{\sqrt{2x}}dx$.

Entonces,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}\sqrt{2}\, e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\, e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{\pi}\ ,$$

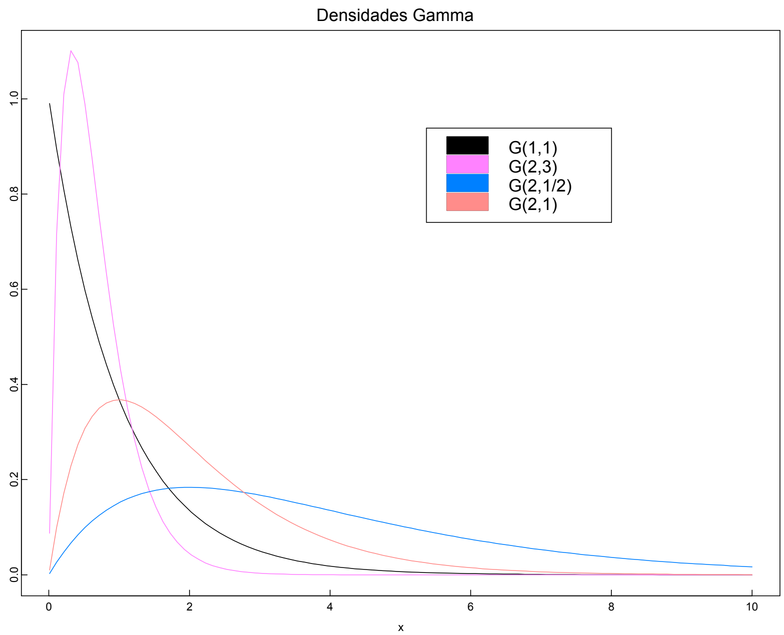
ya que la integral de la última igualdad es la integral de la densidad normal standard y por lo tanto es igual a 1.

<u>Definición:</u> Se dice que *X* tiene distribución Gamma de parámetros α y λ ($\alpha > 0$, $\lambda > 0$) si su función de densidad está dada por

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda x}\, x^{\alpha-1}\, \lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

<u>Notación</u>: $X \sim \Gamma(\alpha\ ,\ \lambda)$ o bien $X \sim G\ (\alpha\ ,\ \lambda)$.

En el siguiente gráfico se muestra la densidad correspondiente a $X \sim G\ (\alpha\ ,\ \lambda)$ para distintos valores de los parámetros.



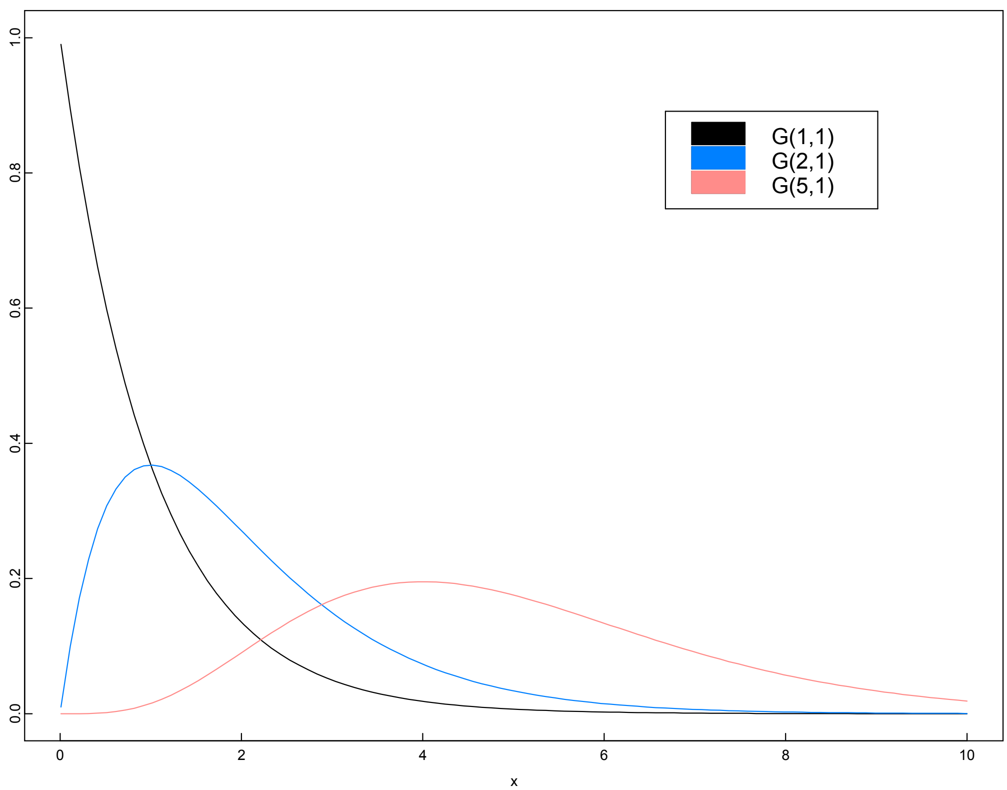
Definición: Si λ = 1, la distribución se denomina Gamma standard. Es decir, X tiene distribución Gamma standard de parámetro α ($X \sim \Gamma(\alpha , 1)$) si su densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-x} \, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_{(0,\infty)}(x)$$

Esta función de densidad es estríctamente decreciente si $\alpha \leq 1$, y si $\alpha > 1$ alcanza un máximo y después decrece.

La distribución Gamma standard está tabulada para diferentes valores de α.

Volviendo a la densidad Gamma general, λ es un parámetro de escala ya que valores de λ distintos de 1, comprimen o expanden la curva.



Esperanza y varianza de una variable aleatoria Gamma:

Proposición: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, entonces $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ y $V(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

Dem:

$$E(X) = \int_0^\infty x \frac{e^{-\lambda x}\, x^{\alpha-1}\, \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\, x^{\alpha}\, \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\, x^{(\alpha+1)-1}\, \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\, x^{(\alpha+1)-1}\, \lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} dx = \frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\lambda\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Observemos que la última integral es la integral, sobre todo su rango, de la densidad de una v.a. con distribución $\Gamma(\alpha+1, \lambda)$ y por lo tanto es igual a 1.

Calculemos ahora $E(X^2)$.

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2\,\frac{e^{-\lambda x}\,x^{\alpha-1}\,\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,dx=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\,x^{\alpha+1}\,\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,dx=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\,x^{\alpha+2-1}\,\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\,\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\,x^{\alpha+2-1}\,\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}\,dx=\frac{(\alpha+1)\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\lambda^2\,\Gamma(\alpha)}=\frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}\,.$$

Observemos que la última integral es la integral, sobre todo su rango, de la densidad de una v.a. con distribución $\Gamma(\alpha+2, \lambda)$ y por lo tanto es igual a 1.

Finalmente, $V(X)=\dfrac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}-\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\right)^2=\dfrac{\alpha^2}{\lambda^2}+\dfrac{\alpha}{\lambda^2}-\dfrac{\alpha^2}{\lambda^2}=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$, como queríamos demostrar.

<u>Propiedad</u>: Si $X \sim \Gamma(\alpha , \lambda)$ y a > 0, $aX \sim \Gamma(\alpha , \lambda / a)$.

Dem: Ejercicio.

<u>Nota</u>: Esta última propiedad permite obtener probabilidades para una v. a. con distribución Gamma a partir de una distribución Gamma standard. En efecto, supongamos que $X \sim \Gamma(\alpha , \lambda)$, entonces $\lambda X \sim \Gamma(\alpha , 1)$ y, por ejemplo

$$P(X\le x)=P(\lambda X\le \lambda x)=F_{\lambda X}(\lambda x)$$

<u>Observación</u>: Algunos autores, por ejemplo J. Devore, utilizan otra parametrización de la distribución Gamma, definiendo como segundo parámetro de la distribución a $1/\lambda$. es decir: $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ si su función de densidad está dada por

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{x}{\beta}}\,x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\,I_{(0,\infty)}(x)$$

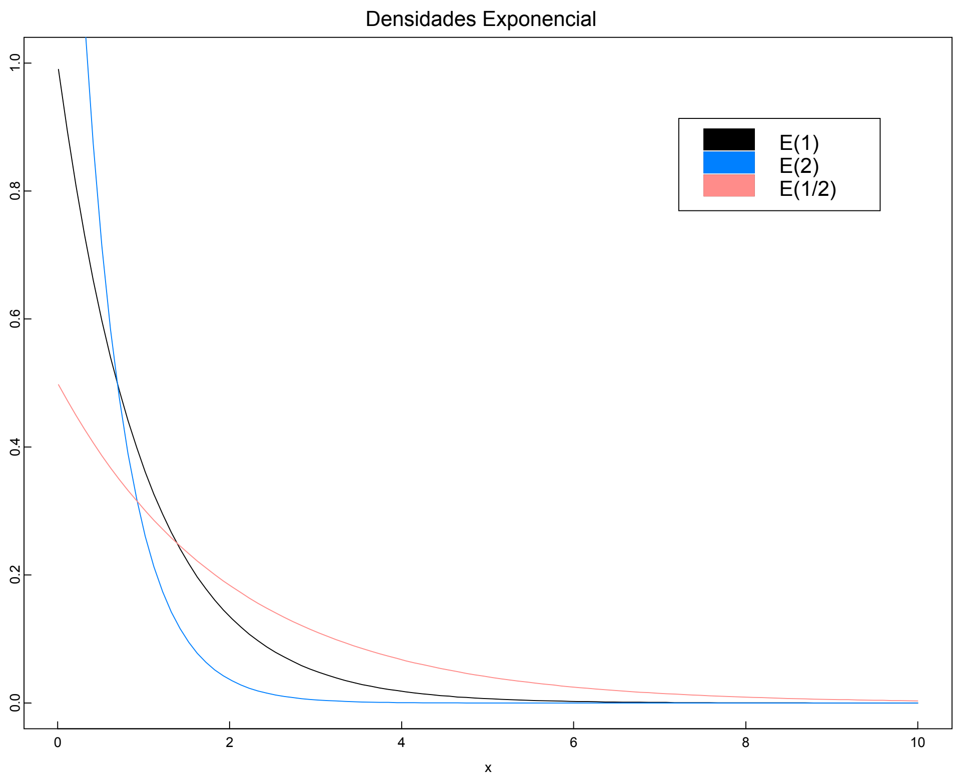
En este caso, $E(X)=\alpha\,\beta$ y $V(X)=\alpha\,\beta^2$.

<u>**Distribución Exponencial:**</u> Se trata de un caso particular de la distribución Gamma, ya que una v.a. exponencial es una v.a. Gamma con parámetro $\alpha = 1$.

<u>Definición</u>: X tiene distribución exponencial de parámetro λ ($\lambda > 0$) si su función de densidad está dada por:

$$f(x)=\lambda\,e^{-\lambda x}\,I_{(0,\infty)}(x)$$

<u>Notación</u>: $X \sim \varepsilon(\lambda)$.



Función de distribución de una v.a. exponencial: Si $X \sim \varepsilon\ (\lambda)$, su función de distribución acumulada está dada por

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

En efecto, si $x > 0$,

$$F(x)=\int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\,dt = -\,e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x}+1,$$

como queríamos demostrar.

Proposición: Si $X \sim \varepsilon\ (\lambda)$, entonces $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ y $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Dem: Se deduce inmediatamente de la esperanza y la varianza de una v.a. Gamma con parámetro $\alpha = 1$.

Ejemplo: Supongamos que el tiempo de respuesta de una terminal conectada en línea es una v.a. X con distribución exponencial con esperanza igual a 5 segundos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea mayor de 10 segundos?

Observemos que, dado que E(X)=5, $X \sim \varepsilon$ (1/5), entonces

$$P(X > 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5}10}\right) = e^{-2} = 0.135.$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 5 y 10 segundos?

$$P(5 \le X \le 10) = F(10) - F(5) = \left(1 - e^{-\frac{10}{5}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{5}{5}}\right) = e^{-1} - e^{-2} = 0.233.$$

Proposición (Propiedad de Falta de Memoria): Sea $X \sim \varepsilon$ (λ), y sean s y t números reales positivos cualesquiera,

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Dem: Ejercicio. (Sugerencia: Usar que si $X \sim \varepsilon$ (λ), $P(X > s) = e^{-\lambda s}$).

Relación de la distribución exponencial con los procesos de Poisson: Supongamos que la ocurrencia de cierto tipo de eventos sigue un proceso de Poisson de intensidad o tasa media de ocurrencia ν, y por lo tanto la v.a. X_t: "número de ocurrencias en un intervalo de longitud t " tiene distribución $P(\nu\, t)$.

Se puede demostrar que la v.a. T: "tiempo hasta la ocurrencia del primer evento" (o equivalentemente, tiempo entre la ocurrencia de dos eventos sucesivos), tiene distribución exponencial.

Proposición: Dado un proceso de Poisson de intensidad ν, si se define la v.a. T: "tiempo hasta la ocurrencia del primer evento", entonces $T \sim \varepsilon(\nu)$.

Dem: Si $t \le 0$, $F_T(t) = 0$. Sea $t > 0$,

$$F_T(t) = P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X_t = 0).$$

En efecto, si el tiempo hasta la primera ocurrencia es mayor que *t*, no ha ocurrido ningún evento en el intervalo (0,t) y recíprocamente. Entonces,

$$F_T(t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - \frac{e^{-\nu t}(\nu t)^0}{0!} = 1 - e^{-\nu t},$$

y por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\nu x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es decir, $T \sim \varepsilon(\nu)$.

<u>Ejercicio</u>: Demostrar que el tiempo de espera hasta la segunda ocurrencia del evento tiene distribución $\Gamma(2, \nu)$.