PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 3

1. Sea X una v.a. con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.75\,(1-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Verificar que f_X es realmente una función de densidad.

   b) Calcular:

$$P(X>0) \qquad P(-0.5<X<0.5) \qquad P(|X|>0.25)$$

2. Sea X una v.a. continua con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^3}{\theta} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

   a) ¿Cuál es el valor de θ?

   b) Calcular, usando $F_X(x)$,

$$P(X \leq 1) \qquad P(0.5 \leq X \leq 1) \qquad P(0.5 < X \leq 1 | X < 1)$$

   c) Hallar la mediana $\tilde{\mu}$ de esta distribución.

   d) Encontrar la función de densidad $f_X(x)$.

3. Consideremos una v.a. X con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{(1+\alpha\,x)}{2}\, I_{(-1,1)}(x)$$

   donde $\alpha \in (-1,1)$.

   a) Hallar la función de distribución acumulada de X.

   b) Calcular $E(X)$ y $V(X)$.

   c) Calcular la mediana y los cuartiles de esta distribución.

4. Consideremos una v.a. Y con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{25}y & 0 \leq y < 5 \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{25}y & 5 \leq y < 10 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcular la función de distribución de Y.

b) Calcular $E(Y)$ y $V(Y)$.

c) Calcular $E(1/Y)$. ¿Qué conclusión saca respecto a la relación entre $E(1/Y)$ y $1/E(Y)$.

5. La función de densidad de la v.a. X es:

$$f(x) = (a + b\,x^2)\, I_{(0,1)}(x)$$

a) Hallar los valores de a y b sabiendo que $E(X) = 0.6$.

b) Calcular la función de distribución acumulada de X.

6. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones de densidad. Demostrar que, si $\alpha \in (0,1)$, entonces

$$\alpha\, f(x) + (1-\alpha)\, g(x)$$

es una función de densidad. ¿Cuál es el valor esperado de la nueva distribución?.

7. Se eligen n puntos al azar en el intervalo $[0,1]$ de forma independiente (con distribución uniforme). Sea X = Cantidad de puntos que caen en el intervalo $[0,p]$ $(0 < p < 1)$. ¿Qué distribución tiene X?

8. Sea Z una v.a. con distribución $N(0,1)$. Calcular:

a) $P(0 \leq Z \leq 2)$

b) $P(|Z| \leq 2.5)$

c) $P(Z \geq -1.37)$

d) c tal que $P(Z < c) = 0.98$

e) c tal que $P(|Z| \leq c) = 0.90$

f) el valor z_α para $\alpha = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$.

9. Sea X una v.a. con distribución $N(5, 0.25)$. Calcular:

a) $P(4.75 \leq X \leq 5.50)$

b) $P(|X| > 5.25)$

c) c tal que $P(|X-5| \leq c) = 0.90$

d) el 90-percentil de X.

10. Se supone que en cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) es una v.a. con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Si hay un 58% de individuos con $I \leq 75$, un 38% con $75 < I \leq 80$ y un 4% con $I \geq 80$, hallar la función de densidad de I y calcular $P(78 \leq I \leq 82)$.

11. La biblioteca de una facultad dispone de una red de computadoras al alcance de los estudiantes. La proporción de tiempo que un usuario destina a búsqueda bibliográfica es una variable aleatoria T con función de densidad

$$f_T(t) = c\,(100 - t)\; I_{[0,100]}(t)$$

   a) Hallar el valor de la constante c

   b) Supóngase que de acuerdo con el porcentaje de tiempo destinado a la búsqueda bibliográfica el usuario es clasificado en una de cuatro categorías: **1** si $T < 25\%$, **2** si $25\% \leq T < 50\%$, **3** si $50\% \leq T < 75\%$ y **4** si $T > 75\%$. Hallar la distribución de la categoría asignada a un usuario.

12. El diámetro D (expresado en dm) del tronco de cierta especie de árboles es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_D(x) = k\,x\,I_{(0,10)}(x).$$

   a) Hallar el valor de la constante k.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

   c) Idem b) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.

   d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan el diámetro entre 4 y 6 dm.

   e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm, sea mayor o igual que 0.99?

13. Dos fábricas de tomates en lata (**A** y **B**) abastecen a una gran cadena de supermercados en una proporción de 40% y 60% respectivamente. El peso en gramos de las latas tiene distribución normal. En el caso de las latas producidas por la fábrica **A** el valor esperado es 250 gramos y el desvío standard 4 gramos y en el caso de las producidas por la fábrica **B** la mediana es 249 gramos y el desvío standard 5 gramos.

   a) Hallar la probabilidad de que el peso de una lata elegida al azar entre las producidas por la fábrica **A** sea mayor que 248 gramos.

   b) Hallar la probabilidad de que una lata elegida al azar de la producción total sea mayor que 248 gramos.

   c) Si el peso de una lata elegida al azar de la producción total es mayor que 248 gramos, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica **A**?.

14. La porción de memoria ocupada en un servidor de un sistema de terminales en red es una variable aleatoria continua X que toma valores entre 0 (sin carga) y 1 (carga completa). La densidad de X está dada por

$$f_X(x) = 4x^3 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1$$

a) Halle la mediana de la porción ocupada de memoria.

b) Deduzca la densidad de la variable que mide la porción de memoria que falta ocupar, es decir $Z = 1 - X$.

15. El tiempo de caída de un sistema se define como la fracción de tiempo que el sistema no está operativo debido a una falla del hardware o del software. Supongamos que $T=$ tiempo de caída de un sistema en horas es una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$te^{-\frac{t^2}{2}} \quad I_{(0,\infty)^{(t)}}$$

   a) Deduzca la función de distribución acumulada de T.

   b) Cuando el sistema está caído por más de una hora, todos los archivos de trabajo abiertos en el momento de la caída se pierden. Si un usuario está trabajando en un archivo mientras el sistema cae, ¿cuál es la probabilidad de que el archivo no se pierda?

   c) Supongamos que al caer el sistema, el tiempo que tarda un usuario en recuperar su trabajo es una función creciente del tiempo de caída, digamos T^2. Deduzca la función de densidad de T^2

16. La vida útil (en meses) de un componente electrónico es una v.a. V con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$, tal que $P(V > 20) = 0.449$.

   a) Hallar $E(V)$ y $Var(V)$.

   b) Hallar la probabilidad de que la vida útil de uno de estos componentes sea mayor que 10 meses.

   c) Si se sabe que uno de estos componentes dura más de 20 meses, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 30 meses? Comparar con (b).

   d) Si se sabe que uno de estos componentes dura más de t meses, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de $t + s$ meses ($t > 0$, $s > 0$)?

17. Las tareas llegan a una cola de un sistema de computación con un solo servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 4$ tareas por minuto. Llamemos a dicho proceso X_t. Sea T el tiempo de espera hasta que llegue la primera tarea medido en minutos. Calcule la probabilidad de que a lo sumo haya que esperar 15 segundos hasta que arribe la primera tarea.

18. Un sistema consta de 5 componentes electrónicos como los del Ejercicio 16, conectados en serie. Al fallar uno cualquiera de éstos, automáticamente se desconecta el sistema. Se supone que los tiempos de vida de los componentes son independientes. Es decir, si se definen los eventos

$$A_i = \{\text{el i-ésimo componente dura por lo menos hasta el instante } t\},$$

   con $i = 1, \ldots, 5$, estos eventos son independientes.

   Sea X el momento en el cual el sistema se desconecta.

a) Escribir el evento $\{X \geq t\}$ en función de los A_i.

b) Usar la independencia de los A_i para calcular $P(X \geq t)$.

c) Hallar las funciones de distribución y de densidad de X. ¿A qué familia pertenece esta distribución?

19. Sea X una v.a. con función de densidad $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x), \quad \text{con } \alpha > 0, \lambda > 0.$$

a) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.
(NOTA: Usar que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ para $\alpha > 0$.)

b) Probar que si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ y $c > 0$ entonces $cX \sim \Gamma(\alpha, \lambda/c)$.

20. Sea X una v.a. con distribución $U(0,1)$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias.

a) $cX + d$

b) X^α, siendo α un número real positivo

c) $\ln X$

d) $-\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$, siendo $\lambda > 0$.

21. Sea Z una v.a. con distribución normal standard. Pruebe que $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$. (Esta distribución recibe el nombre de χ^2 con un grado de libertad).
(NOTA: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.)

22. Sea X una v.a. con función de distribución $\mathcal{E}(2)$. Se define $Y = [X] + 1$ (donde $[\cdot]$ es la parte entera). Probar que $Y \sim \mathcal{G}(1 - e^{-2})$.

23. Sea X una variable aleatoria continua que mide el tiempo de duración de cierto sistema. Se define la función tasa de falla $r(t)$ como el límite (cuando $\Delta t \to 0$) de la probabilidad de que el sistema falle en el intervalo $(t, t+\Delta t)$ dado que a tiempo t estaba funcionando, sobre la longitud del intervalo (Δt).

(a) Probar que

$$r(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

(b) Probar que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $r(t) = \lambda$ para todo t.

(c) Probar que si $X \geq 0$ y $r(t) = \lambda$ para todo t entonces $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Esta es una de las razones que justifican la utilización de la distribución exponencial para modelar este tipo de fenómenos.

24. **Generación de números al azar**

(a) Usando el Ejercicio 20 parte a), generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución $U(3,8)$.

(b) Usando el Ejercicio 20 parte d), generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución exponencial de parámetro 10.

(c) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con la siguiente distribución uniforme discreta:

$$p_X(k) = \frac{1}{100} \qquad \text{si } \ k = 0, 1, ..., 99.$$

(d) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución $Bi(1, 1/3)$.

(e) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución de Poisson de parámetro 5.

25. Verifique las expresiones de las funciones generadoras de momentos dadas en la siguiente tabla, indicando para qué valores de t está definida cada una de ellas:

$Bi(n,p)$	$[pe^t + (1-p)]^n$
$P(\lambda)$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$
$E(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
$U(a,b)$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
$\Gamma(\alpha,\lambda)$	$\left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^\alpha$