Vectores aleatorios

Hasta ahora hemos estudiado modelos de probabilidad para una única variable aleatoria. Sin embargo, en muchos casos interesa construir modelos que involucren a más de una variable. Consideraremos inicialmente el caso de vectores aleatorios bidimensionales y luego extenderemos las definiciones y propiedades a vectores de dimensión mayor que 2.

Definición: Sean *X* e *Y* v.a. discretas definidas sobre un espacio muestral *S*. La **función de probabilidad conjunta** del par (*X,Y*), $p_{XY}(x,y)$ se define como

$$p_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

El conjunto $R_{XY} = \{(x,y) / x \in R_X , y \in R_Y\}$ es el recorrido o rango del vector aleatorio (*X,Y*).

Dado cualquier conjunto $A \subseteq \Re^2$,

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} \sum p_{XY}(x,y)$$

Una función de probabilidad conjunta satisface:

- $p_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)$
- $\sum_x \sum_y p_{XY}(x,y) = 1$

Ejemplos: 1) De una urna que contiene 6 bolillas blancas y 4 negras se extraen sin reposición 3 bolillas. Se definen

X: número de bolillas blancas extraídas

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolillas negras extraídas es par ó 0} \\ 0 & \text{si el número de bolillas negras extraídas es impar} \end{cases}$$

Hallemos la función de probabilidad conjunta del vector (*X*,*Y*). Observemos que los posibles valores de *X* son 0, 1, 2 y 3 , y los posibles valores de *Y* son 1 y 0. Podemos resumir la información en una tabla de la forma siguiente:

		X			
		0	**1**	**2**	**3**
Y	**0**	1/30	0	15/30	0
	1	0	9/30	0	5/30

En efecto,

$p_{XY}(0,0) = P(X = 0, Y = 0)$ equivale al suceso "se extraen 3 bolillas negras" y por lo tanto tiene probabilidad 1/30.

$p_{XY}(0,1) = P(X = 0, Y = 1)$ equivale al suceso "se extraen 3 bolillas negras y el número de bolillas negras es par" y por lo tanto tiene probabilidad 0.

De esta forma, se completa la tabla de probabilidades conjuntas.

2) Repetir el Ejemplo 1, suponiendo que las extracciones se realizan con reposición.

Definición: Sea (X,Y) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x,y)$, las **funciones de probabilidad marginal** de X e Y están dadas por

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)$$
$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

Ejemplos: 1) En el ejemplo presentado antes, hallemos las funciones de probabilidad marginal. En primer lugar, hallemos $p_X(x)$.

$$p_X(0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) = \frac{1}{30} + 0 = \frac{1}{30}$$
$$p_X(1) = p_{XY}(1,0) + p_{XY}(1,1) = 0 + \frac{9}{30} = \frac{9}{30}$$
$$p_X(2) = p_{XY}(2,0) + p_{XY}(2,1) = \frac{15}{30} + 0 = \frac{15}{30}$$
$$p_X(3) = p_{XY}(3,0) + p_{XY}(3,1) = 0 + \frac{5}{30} = \frac{5}{30}$$

Respecto a $p_Y(y)$,

$$p_Y(0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(1,0) + p_{XY}(2,0) + p_{XY}(3,0) = \frac{1}{30} + 0 + \frac{15}{30} + 0 = \frac{16}{30}$$
$$p_Y(1) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(3,1) = 0 + \frac{9}{30} + 0 + \frac{5}{30} = \frac{14}{30}$$

Observemos que las funciones de probabilidad marginal se obtienen sumando sobre filas o columnas las funciones de probabilidad conjunta contenidas en la tabla, de ahí su nombre.

		X				$p_Y(y)$
		0	**1**	**2**	**3**	
Y	**0**	1/30	0	15/30	0	16/30
	1	0	9/30	0	5/30	14/30
$p_X(x)$		1/30	9/30	15/30	5/30	**1**

Definición: Sea (*X*,*Y*) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x,y)$, la **función de distribución acumulada conjunta** de (*X*,Y) está dada por

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{s \le x} \sum_{t \le y} p_{XY}(s,t) \qquad \forall (x,y) \in \Re^2$$

Definición: Sean *X* e *Y* v.a. continuas definidas sobre un espacio muestral *S*. El vector aleatorio (*X*,*Y*) es continuo si existe una función, denominada **función de densidad conjunta**, $f_{XY}(x,y) : \Re^2 \to \Re^{\ge 0}$, tal que

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy \qquad \forall\, A \subseteq \Re^2$$

En particular, si $A = [a,b] \times [c,d]$,

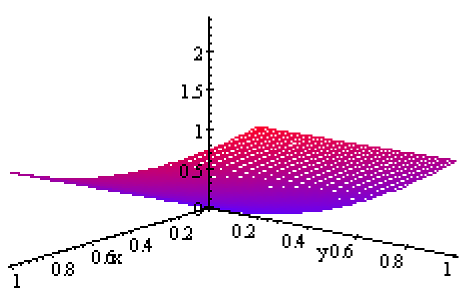
$$P((X,Y) \in A) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)\, dy\, dx\, .$$

Una función de densidad conjunta satisface:

- $f_{XY}(x,y) \ge 0 \qquad \forall (x,y)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1$

Ejemplo: 1) Sea (*X*,*Y*) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x + y^2) & \text{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



a) Hallar el valor de la constante *k*.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 k\left(x+y^2\right)dx\,dy=k\int_0^1\left(\int_0^1\left(x+y^2\right)dx\right)dy=$$

$$=k\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy^2\right)\Bigg|_0^1 dy=k\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y^2\right)dy=k\left(\frac{y}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=k\,\frac{5}{6}$$

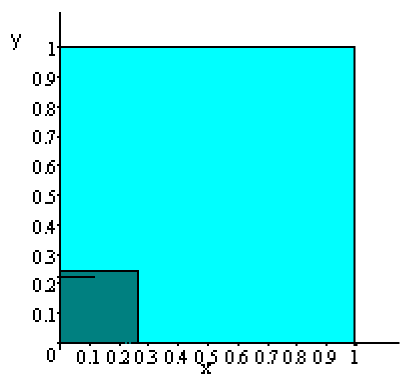
y, por lo tanto, $k=\dfrac{6}{5}$.

b) Calcular $P\left(0\le X\le\dfrac{1}{4},\, 0\le Y\le\dfrac{1}{4}\right)$.

$$P\left(0\le X\le\frac{1}{4},\, 0\le Y\le\frac{1}{4}\right)=\int_0^{1/4}\int_0^{1/4}\frac{6}{5}\left(x+y^2\right)dx\,dy=\frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\frac{x^2}{2}+x\,y^2\right)\Bigg|_0^{1/4} dy=$$

$$=\frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\frac{1}{16\cdot 2}+\frac{1}{4}y^2\right)dy=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{32}y+\frac{1}{4}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/4}=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{32\cdot 4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64\cdot 3}\right)=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{128}+\frac{1}{768}\right)=$$

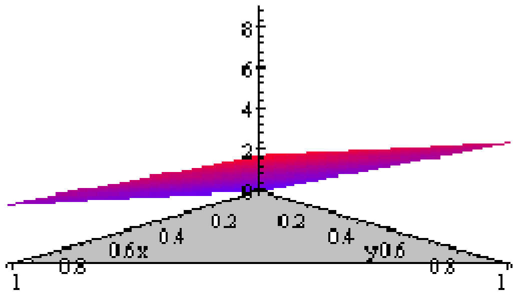
$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{768}=\frac{7}{640}$$



2) Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = k\,(x+2y)\,I_T(x,y),$$

siendo $T = \{(x,y) / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$.



a) Hallar el valor de la constante k.

b) Hallar $P\left(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right)$.

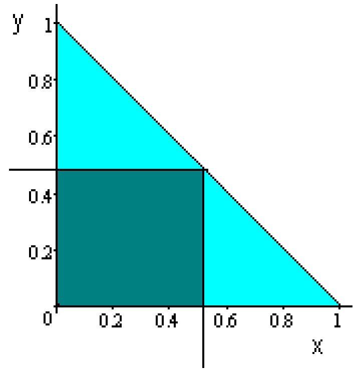
c) Hallar $P(X \le Y)$.

a) $$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} k(\mathrm{x}+2\mathrm{y})\,dy \right) dx = k\int_0^1 (xy+y^2)\Big|_0^{1-x}\,dx =$$

$$= k\int_0^1 \left(x(1-x) + (1-x)^2 \right) dx = k\int_0^1 (1-x)\,dx = k\left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = k\,\frac{1}{2} \Rightarrow k = 2$$

b) $$P\left(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} 2\,(x+2y)\,dy\,dx = 2\int_0^{1/2} (xy+y^2)\Big|_0^{1/2} dx = 2\int_0^{1/2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)dx =$$

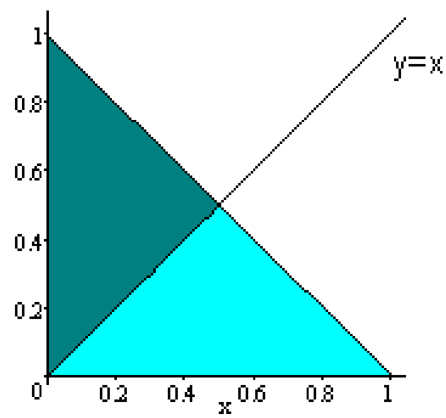
$$= 2\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^{1/2} = 2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



c) $P(X \leq Y) = \int_0^{1/2} \left(\int_x^{1-x} 2(x+2y)\, dy \right) dx = 2 \int_0^{1/2} (xy + y^2)\Big|_x^{1-x} dx =$

$$= 2\left(\int_0^{1/2} x(1-x) + (1-x)^2 - x^2 - x^2 \right) dx = 2 \int_0^{1/2} \left(1 - x - 2x^2\right) dx = 2 \left(x - \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \right) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$



3) En este ejemplo presentaremos a la distribución Uniforme sobre una región, la cual generaliza a la distribución Uniforme sobre un intervalo estudiada en el caso de variables aleatorias. Diremos que el vector aleatorio tiene **distribución Uniforme** sobre una región $A \subset \Re^2$ si su densidad es constante sobre la región y 0 fuera de ella, es decir

$$(X,Y) \sim U(A) \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases}$$

Es inmediato verificar que $k = \dfrac{1}{\text{área}(A)}$, pues

$$1 = \iint_A k\, dx\, dy = k \iint_A dx\, dy = k\ \text{área}(A) .$$

También es inmediato verificar que

$$P\big((X,Y) \in B\big) = \frac{\text{área}(A \cap B)}{\text{área}(A)} \qquad \forall\ B \subset \Re^2 .$$

Definición: Sea (*X,Y*) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$, la **función de distribución acumulada conjunta** de (*X*,Y) está dada por

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(s,t)\, dt\, ds \qquad \forall\ (x,y) \in \Re^2$$

Definición: Sea (*X,Y*) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$, las **funciones de densidad marginal** de *X* e *Y* están dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$$

Ejemplos: 1) Sea (*X*,*Y*) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6}{5}\left(x + y^2\right) & \text{si } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallemos las funciones de densidad marginal.

Si $x \notin [0,1]$, $f_X(x) = 0$ pues para esos valores de *x* la densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = 0$.

Sea $x \in [0,1]$,

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)\,dy = \frac{6}{5}\left(xy + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Entonces, $f_X(x) = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) I_{[0,1]}(x).$

Si $y \notin [0,1]$, $f_Y(y) = 0$ pues para esos valores de *y* la densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = 0$.

Sea $y \in [0,1]$,

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)\,dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2} + xy^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right).$$

Entonces, $f_Y(y) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right) I_{[0,1]}(y).$

2) Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = 2\,(x + 2y)\, I_T(x,y),$$

siendo $T = \{(x,y) \,/\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}.$

Si $x \notin [0,1]$, $f_X(x) = 0$ pues para esos valores de *x* la densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = 0$.

Sea $x \in [0,1]$,

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2(x + 2y)\,dy = 2\left(xy + y^2\right)\Big|_0^{1-x} = 2\left(x(1-x) + (1-x)^2\right) = 2(1-x).$$

Entonces, $f_X(x) = 2(1-x)\, I_{[0,1]}(x).$

Si $y \notin [0,1]$, $f_Y(y) = 0$ pues para esos valores de *y* la densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = 0$.

Sea $y \in [0,1]$,

$$f_Y(y)=\int_0^{1-y} 2(x+2y)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Bigg|_0^{1-y} = 2\left(\frac{(1-y)^2}{2}+2(1-y)y\right)=1+2y-3y^2.$$

Entonces, $f_Y(y)=(1+2y-3y^2)\,I_{[0,1]}(y).$

Definición: Sea (X,Y) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x,y)$ y marginales $p_X(x)$ y $p_Y(y)$, y sea x tal que $p_X(x)>0$, la **función de probabilidad condicional** de Y dado $X=x$ está dada por

$$p_{Y|X=x}(y)=\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}.$$

Del mismo modo, sea y tal que $p_Y(y)>0$, la **función de probabilidad condicional** de X dado $Y=y$ está dada por

$$p_{X|Y=y}(x)=\frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}.$$

Se puede verificar que, en efecto estas funciones son funciones de probabilidad ya que, por ejemplo, $p_{Y|X=x}(y)$ satisface

- $p_{Y|X=x}(y)\geq 0$ para todo y
- $\sum_y p_{Y|X=x}(y)=1$

La primera condición se satisface ya que $p_X(x)>0$ y $p_{XY}(x,y)\geq 0\ \forall\ x,y.$

Respecto a la segunda,

$$\sum_y p_{Y|X=x}(y)=\sum_y \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}=\frac{1}{p_X(x)}\sum_y p_{XY}(x,y)=\frac{1}{p_X(x)}\,p_X(x)=1.$$

Ejemplo: Se arroja dos veces un tetraedro cuyas caras están numeradas 1, 2, 3 y 4. Se definen las variables aleatorias

X: "suma de los puntos obtenidos"
Y: "número de ases"

Hallemos en primer lugar la función de probabilidad conjunta de (X,Y) y las funciones de probabilidad marginal.

		X							$p_Y(y)$
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
Y	**0**	0	0	1/16	2/16	3/16	2/16	1/16	9/16
	1	0	2/16	2/16	2/16	0	0	0	6/16
	2	1/16	0	0	0	0	0	0	1/16
$p_X(x)$		1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	1

Obtengamos, por ejemplo, la función de probabilidad condicional de Y, dado $X = 4$

$$p_{Y|X=4}(0) = \frac{p_{XY}(4,0)}{p_X(4)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$$

$$p_{Y|X=4}(1) = \frac{p_{XY}(4,1)}{p_X(4)} = \frac{2/16}{3/16} = \frac{2}{3}$$

$$p_{Y|X=4}(2) = \frac{p_{XY}(4,2)}{p_X(4)} = \frac{0}{3/16} = 0$$

que, podemos resumir en la siguiente tabla:

y	0	1	2
$p_{Y\|X=4}(y)$	1/3	2/3	0

En cambio, la función de probabilidad condicional de Y, dado $X = 3$, estará dada por

y	0	1	2
$p_{Y\|X=3}(y)$	0	1	0

De la misma forma, pueden obtenerse todas las funciones de probabilidad condicional de Y dado $X = x$, y las de X dado $Y = y$.

En cuanto al caso continuo, supongamos que en el Ejemplo 2) en el cual la densidad conjunta estaba dada por

$$f_{XY}(x, y) = 2\,(x + 2y)\, I_T(x, y),$$

siendo $T = \{(x, y) / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$, deseamos hallar $P\left(X \le \frac{1}{2} \middle| Y \le \frac{1}{4} \right)$.

$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \,\middle|\, Y \leq \frac{1}{4} \right) = \frac{P\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{4} \right)}{P\left(Y \leq \frac{1}{4} \right)}$$

Por un lado,

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{4} \right) = \int_0^{1/4} \int_0^{1/2} 2(x + 2y)\, dx\, dy = 2 \int_0^{1/4} \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right)\Bigg|_0^{1/2} dy =$$

$$= 2 \int_0^{1/4} \left(\frac{1}{8} + y \right) dy = 2\left(\frac{1}{8} y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1/4} = 2\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} \right) = \frac{1}{8}$$

y, por otro

$$P\left(Y \leq \frac{1}{4} \right) = \int_0^{1/4} (1 + 2y - 3y^2)\, dy = (y + y^2 - y^3)\Big|_0^{1/4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{19}{64}.$$

Entonces,

$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \,\middle|\, Y \leq \frac{1}{4} \right) = \frac{1/8}{19/64} = \frac{8}{19}.$$

¿Cómo calcularíamos $P\left(X \leq \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{4} \right)$? Ahora no es aplicable directamente la definición de probabilidad condicional porque $P(Y = y) = 0 \;\; \forall\, y$. Se requiere la siguiente definición.

<u>Definición</u>: Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ y marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, y sea x tal que $f_X(x) > 0$, la **función de densidad condicional** de Y dado $X = x$ está dada por

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Del mismo modo, sea y tal que $f_Y(y) > 0$, la **función de densidad condicional** de X dado $Y = y$ está dada por

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\ .$$

Se puede verificar que, en efecto estas funciones son funciones de densidad ya que, por ejemplo, $f_{Y|X=x}(y)$ satisface

- $f_{Y|X=x}(y)\geq 0$ para todo *y*
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y)dy=1$

La primera condición se satisface ya que $f_X(x)>0$ y $f_{XY}(x,y)\geq 0\ \forall\ x,y$.

Respecto a la segunda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}dy=\frac{1}{f_X(x)}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\frac{1}{f_X(x)}\ f_X(x)=1.$$

<u>Ejemplo</u>: Volviendo al ejemplo 2 y a la pregunta que motivó esta definición,

$$P\left(X\leq\frac{1}{2}\,\middle|\,Y=\frac{1}{4}\right)=\int_0^{1/2} f_{X|Y=1/4}(x)\,dx$$

Hallemos la densidad condicional de *X*, dado *Y*=1/4.

$$f_{X|Y=1/4}(x)=\frac{f_{XY}(x,1/4)}{f_Y(1/4)}=\frac{2(x+2/4)\,I_{(0,3/4)}(x)}{1+\frac{1}{2}-\frac{3}{16}}=\frac{32}{21}\left(x+\frac{1}{2}\right)I_{(0,3/4)}(x)\ .$$

Notemos que, dado *Y* = *y*, *X* toma valores en el intervalo (0,1-*y*). De ahí que, como *Y* =1/4, *X* toma valores en el intervalo (0, ¾) . Finalmente,

$$P\left(X\leq\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{4}\right)=\int_0^{1/2}\frac{32}{21}\left(\mathrm{x}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{32}{21}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{32}{21}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{7}\ .$$

Independencia de variables aleatorias

Definición: Las variables aleatorias *X* e *Y* son independientes si y sólo si para todo $a < b$ y $c < d$ se satisface

$$P(\{a < X < b\} \cap \{c < Y < d\}) = P(a < X < b)\ P(c < Y < d)$$

Si esta condición no se satisface, diremos que *X* e *Y* son dependientes.

Caso 1: Si el vector *(X,Y)* es **discreto**, la condición de independencia es equivalente a la siguiente: *X* e *Y* son independientes si y sólo si

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y) \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Luego, para probar que dos variables discretas no son independientes, es suficiente con exhibir un punto (x_o, y_o) en el que $p_{XY}(x_0, y_o) \neq\ p_X(x_o)\ \ p_Y(y_o)$.

Caso 2: Si el vector *(X,Y)* es **continuo** y

$$f_{XY}(x,y) =\ f_X(x) f_Y(y) \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

entonces, claramente, *X* e *Y* son independientes.

Para probar que dos variables continuas no son independientes deberíamos exhibir un conjunto (a,b) x $(c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$ (es decir un conjunto de medida no nula) en el que no se satisfaga la condición $f_{XY}(x,y) =\ f_X(x) f_Y(y)$.

Se denomina soporte de una densidad al conjunto de valores en los cuales la densidad es positiva. Si el soporte de la densidad conjunta no es igual al producto cartesiano de los soportes de las densidades de *X* e *Y* es inmediato encontrar un conjunto así: bastaría con exhibir un rectángulo (a_1, b_1) x (c_1, d_1) tal que el intervalo (a_1, b_1) esté contenido en el soporte de *X*, el intervalo (c_1, d_1) en el soporte de *Y* y el rectángulo (a_1, b_1) x (c_1, d_1) no esté contenido en el soporte de (*X,Y*).

Otra forma de probar que *X* e *Y* no son independientes es encontrar un punto (x_o, y_o) en el cual $f_{XY}(x_o, y_0) \neq\ f_X(x_0) f_Y(y_0)$ y en el cual todas las densidades sean continuas. Por continuidad, la condición se cumplirá en un entorno rectangular del punto.

Observemos que si *X* e *Y* son independientes, las funciones de probabilidad o densidad condicional coinciden con las correspondientes marginales.

Ejemplos: 1) Consideremos el primer ejemplo presentado para el caso discreto, cuya función de probabilidad conjunta y sus funciones de probabilidad marginal están dadas por:

		X				$p_Y(y)$
		0	**1**	**2**	**3**	
Y	**0**	1/30	0	15/30	0	16/30
	1	0	9/30	0	5/30	14/30
$p_X(x)$		1/30	9/30	15/30	5/30	**1**

Claramente *X* e *Y* no son independientes ya que, por ejemplo,

$$p_{XY}(0,1) = 0 \neq \frac{1}{30} \cdot \frac{14}{30} = p_X(0)\, p_Y(1).$$

2) Sean *X* e *Y* v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro λ, entonces la función de densidad conjunta del vector (*X*, *Y*) estará dada por

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\; f_Y(y) = \lambda\, e^{-\lambda x}\; \lambda\, e^{-\lambda y}\; I_{(0,\infty)}(x)\, I_{(0,\infty)}(y) =$$

$$= \lambda^2\; e^{-\lambda(x+y)}\; I_{(0,\infty)}(x)\, I_{(0,\infty)}(y).$$

Esperanza de una función de dos variables aleatorias

Hemos visto que, dada una v.a. *X* y una función real h, h(*X*) también es una v.a. y que para calcular su esperanza no necesitamos hallar la distribución de h(X) ya que se obtiene a partir de la función de probabilidad puntual o de densidad de la v.a. *X*, según sea ésta discreta o continua, en la forma

$$E(h(X)) = \sum_x h(x)\; p_X(x) \qquad \text{ó} \qquad E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx$$

Un resultado similar se obtiene en el caso de una función real de un vector aleatorio y está dado por las dos proposiciones siguientes, cuya demostración no haremos.

<u>Proposición</u>: Sean *X* e *Y* dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $p_{XY}(x,y)$ y sea $h(x,y):\Re^2 \to \Re$, entonces $h(X,Y)$ es una variable aleatoria y

$$E\big(h(X,Y)\big) = \sum_x \sum_y h(x,y)\; p_{XY}(x,y)$$

siempre que esta esperanza exista.

Proposición: Sean *X* e *Y* dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$ y sea $h(x,y):\Re^2 \rightarrow \Re$, entonces $h(X,Y)$ es una variable aleatoria y

$$E\big(h(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\ f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

siempre que esta esperanza exista.

Proposición: Sean *X* e *Y* dos v.a. discretas o continuas con función de probabilidad conjunta o de densidad $p_{XY}(x,y)$ ó $f_{XY}(x,y)$ respectivamente y sean *a* y *b* números reales, entonces

$$E\big(aX + bY\big) = aE(X) + bE(Y)$$

Dem: Haremos la demostración para el caso continuo. La demostración para el caso discreto es similar.

Sea $h(X,Y) = aX + bY$, entonces

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (ax+by)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\ f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\right)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\right)dy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y\ f_Y(y)\,dy = aE(X) + bE(Y)$$

como queríamos demostrar.

Proposición: Si *X* e *Y* son v.a. independientes, $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.

Dem: Ejercicio.

Covarianza y correlación

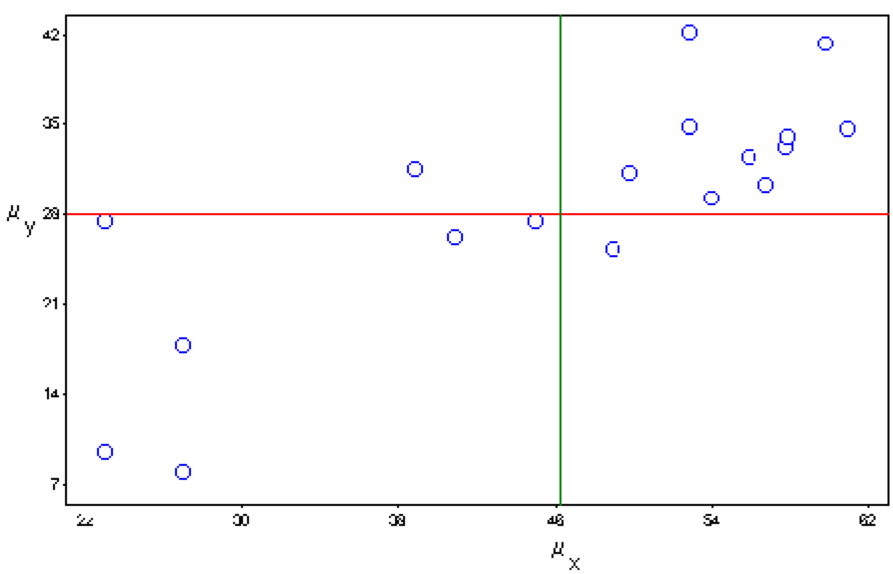
Definición: Sean *X* e *Y* dos v.a. con esperanzas μ_X y μ_Y respectivamente, la **covarianza** entre X e Y se define como

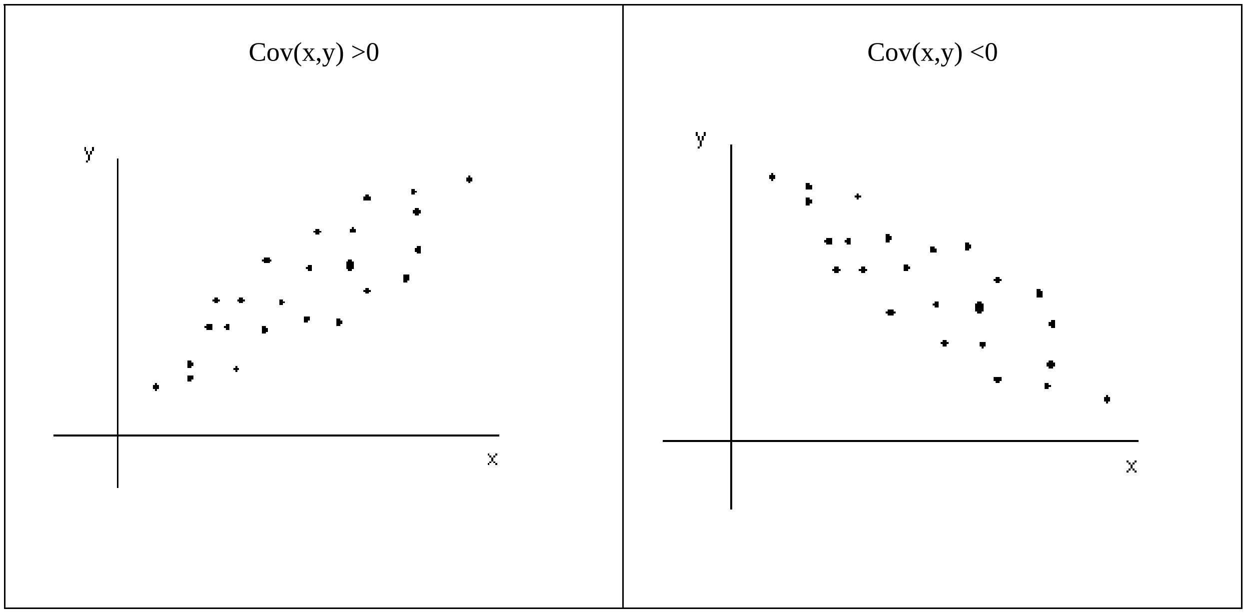
$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, p_{XY}(x,y) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

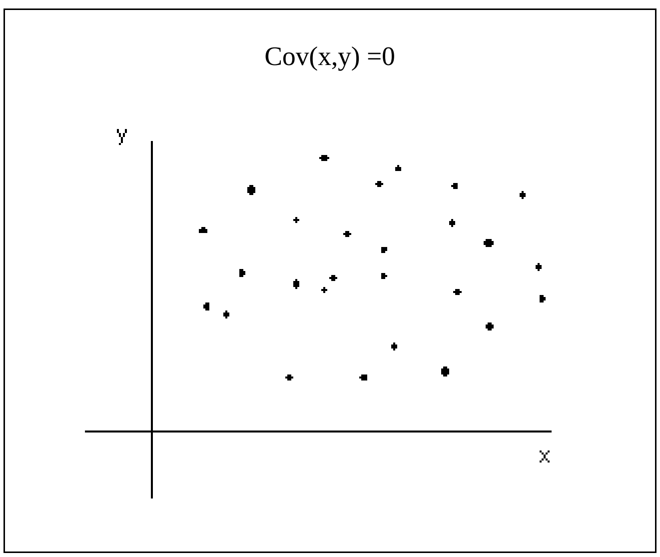
según sean *X* e *Y* discretas o continuas.

Observación: $\operatorname{Cov}(X,X) = V(X)$.

Idea intuitiva: Si *X* e *Y* tienen una fuerte relación positiva, en el sentido que valores grandes de *X* aparecen asociados con valores grandes de *Y* y valores pequeños de *X* aparecen asociados con valores pequeños de *Y*, entonces la mayoría de los productos $(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ serán positivos y por lo tanto la covarianza será positiva. Por otra parte, si *X* e *Y* tienen una fuerte relación negativa, en el sentido que valores grandes de *X* aparecen asociados con valores pequeños de *Y* y valores pequeños de *X* aparecen asociados con valores grandes de *Y*, entonces la mayoría de los productos $(x-\mu_X)(y-\mu_Y)$ serán negativos y por lo tanto la covarianza será negativa.







<u>Proposición</u>: $\text{Cov}(X,Y) = E(X\,Y) - E(X)E(Y)$.

Dem: Lo haremos sólo para el caso discreto. Para el caso continuo se demuestra en forma similar. Denotemos $E(X) = \mu_X$ y $E(Y) = \mu_Y$,

$$\text{Cov}(X,Y) = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, p_{XY}(x,y) =$$

$$= \sum_x \sum_y \left(xy - x\mu_Y - y\mu_X + \mu_X \mu_Y \right) p_{XY}(x,y) =$$

$$= \sum_x \sum_y xy\; p_{XY}(x,y) - \mu_Y \sum_x \sum_y x\; p_{XY}(x,y) - \mu_X \sum_x \sum_y y\; p_{XY}(x,y) + \mu_X \mu_Y \sum_x \sum_y p_{XY}(x,y) =$$

$$= E(XY) - \mu_Y \sum_x x \sum_y p_{XY}(x,y) - \mu_X \sum_y y \sum_x p_{XY}(x,y) + \mu_X \mu_Y =$$

$$= E(XY) - \mu_Y \sum_x x\; p_X(x) - \mu_X \sum_y y\; p_Y(y) + \mu_X \mu_Y =$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

como queríamos demostrar.

Ejemplos: 1) Consideremos nuevamente el primer ejemplo presentado para el caso discreto, cuya función de probabilidad conjunta y sus funciones de probabilidad marginal están dadas por:

		X				$p_Y(y)$
		0	**1**	**2**	**3**	
Y	**0**	1/30	0	15/30	0	16/30
	1	0	9/30	0	5/30	14/30
$p_X(x)$		1/30	9/30	15/30	5/30	**1**

y calculemos *Cov* (X,Y).

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\,Y) - E(X)E(Y) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{j=0}^{1} k\; j\; p_{XY}(k,j) - \left(\sum_{k=0}^{3} k\; p_X(k) \right) \left(\sum_{i=0}^{1} i\; p_Y(i) \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{9}{30} + 3 \cdot \frac{5}{30} - \left(1 \cdot \frac{9}{30} + 2 \cdot \frac{15}{30} + 3 \cdot \frac{5}{30} \right) \left(1 \cdot \frac{14}{30} \right) = \frac{24}{30} - \frac{54}{30} \cdot \frac{14}{30} = -\frac{4}{100}$$

2) Consideremos nuevamente el primer ejemplo presentado para el caso continuo, es decir un vector aleatorio (X,Y) con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x + y^2\right) & \text{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y marginales $f_X(x) = \dfrac{6}{5}\left(x + \dfrac{1}{3}\right) I_{[0,1]}(x)$ y $f_Y(y) = \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{2} + y^2\right) I_{[0,1]}(y)$.

Calculemos Cov (X,Y). En primer lugar,

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy\,\frac{6}{5}\left(x + y^2\right)dx\,dy = \frac{6}{5}\int_0^1\int_0^1\left(x^2 y + xy^3\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 \left(\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^3}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy = \frac{6}{5}\int_0^1\left(\frac{y}{3} + \frac{y^3}{2}\right)dy = \frac{6}{5}\left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = \frac{6}{5}\cdot\frac{7}{24} = \frac{7}{20}$$

Por otra parte,

$$E(X) = \int_0^1 x\,\frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right)dx = \frac{6}{5}\int_{06}^1\left(x^2 + \frac{x}{3}\right)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y\,\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right)dy = \frac{6}{5}\int_0^1\left(\frac{y}{2} + y^3\right)dy = \frac{6}{5}\left(\frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Entonces,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{7}{20} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{1}{100}.$$

<u>Propiedad</u>: Si X e Y son v.a. independientes, Cov (X,Y) = 0. La recíproca no es cierta en general.

Dem: Hemos visto que si X e Y son independientes, $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ y por lo tanto es inmediato que Cov (X,Y) = 0.

Para ejemplificar que la recíproca no es en general cierta, consideremos un vector aleatorio discreto con la siguiente función de probabilidad conjunta

		X					$p_Y(y)$
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	
Y	**0**	1/5	0	0	0	1/5	2/5
	3	0	1/5	0	1/5	0	2/5
	4	0	0	1/5	0	0	1/5

$p_X(x)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

Se observa que *X* e *Y* no son independientes ya que, por ejemplo,

$$p_{XY}(2,3) = 0 \neq p_X(2)\ p_Y(3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

Sin embargo, se puede verificar que Cov (*X*,*Y*) = 0. En efecto,

$$E(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} = 4$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

Entonces, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$.

Observación: La covarianza depende de las unidades en que se expresan las variables aleatorias. Este inconveniente puede salvarse standarizándolas. De este modo se obtiene una medida de la fuerza de la relación entre las v.a. que no depende de sus unidades.

Definición: Sean *X* e *Y* dos v.a. con esperanzas μ_X y μ_Y respectivamente y varianza positiva, el **coeficiente de correlación** entre X e Y se define como

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

siendo σ_X y σ_Y los desvíos standard de *X* e *Y* respectivamente.

Proposición: 1) Sean a, b, c y d números reales, a ≠ 0, c ≠ 0 y *X* e *Y* dos v.a. cualesquiera con varianza positiva, entonces

$$\rho(aX + b, cY + d) = \mathrm{sg}(ac)\ \rho(X,Y)$$

donde sg denota la función signo.

2) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

3) $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ con probabilidad 1, para ciertos valores reales *a* y *b,* $a \neq 0$. Observemos que el coeficiente de correlación mide *relación lineal* entre las v.a.

Dem: 1)

$$\text{Cov}(aX+b, cY+d) = E[(aX+b)(cY+d)] - E(aX+b)\,E(cY+d) =$$

$$= E[acXY + adX + bcY + bd] - (aE(X)+b)(cE(Y)+d) =$$

$$= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd - [acE(X)E(Y) + adE(X) + bcE(Y) + bd] =$$

$$= ac[E(XY) - E(X)E(Y)] = ac\,\text{Cov}(X,Y).$$

Por otra parte, $\sigma_{aX+b} = |a|\,\sigma_X$ y $\sigma_{cY+d} = |c|\,\sigma_Y$ y, por lo tanto

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{\text{Cov}(aX+b, cY+d)}{\sigma_{\text{aX+b}}\ \sigma_{cY+d}} = \frac{ac\,\text{Cov}(X,Y)}{|a|\,|c|\,\sigma_X\ \sigma_Y} = \text{sg}(ac)\ \rho(X,Y)$$

como queríamos demostrar.

2) Consideremos la siguiente función real,

$$q(t) = E[(Y-\mu_Y) - t\,(X-\mu_X)]^2 = E[V - tW]^2$$

siendo $V = Y - \mu_Y$ y $W = X - \mu_X$.
Observemos que $q(t) \geq 0\ \forall\, t$.

Como

$$q(t) = E[V - t\,W]^2 = E(V^2) - 2\,t\,E(V\,W) + t^2 E(W^2)$$

es una función cuadrática en t que toma valores mayores o iguales que 0, su gráfico, o no corta al eje t o lo corta en un solo punto. Es decir que la ecuación $q(t) = 0$ tiene a lo sumo una raíz y por lo tanto su discriminante es menor o igual que 0. (Recordemos que el discriminante de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es $b^2 - 4ac$). En nuestro caso, el discriminante es

$$4[E(V\,W)]^2 - 4E(V^2)E(W^2)$$

y, por lo tanto,

$$4\left[E(V\,W)\right]^2 - 4E(V^2)E(W^2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left[E(V\,W)\right]^2}{E(V^2)E(W^2)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\left[E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)\right]^2}{E\left[(X-\mu_X)^2\right]E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\rho(X,Y)\right]^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1.$$

3) Demostraremos las dos implicaciones.

($\Rightarrow$) Si $\rho^2(X,Y)=1$, y volviendo a la demostración de la propiedad anterior, existe t_o tal que $q(t_o)=0$, o sea tal que

$$E\left[V - t_o\,W\right]^2 = 0,$$

Pero además $E(V - t_o W) = 0$, pues *V* y *W* tienen esperanza igual a 0. Entonces la v.a. $V - t_o W$ tiene varianza cero y por lo tanto es constante con probabilidad 1, es decir

$$P\left(V - t_o W = E(V - t_o W)\right) = P(V - t_o W = 0) = 1$$

o sea,

$$P\left((Y-\mu_Y) - t_o\,(X-\mu_X) = 0\right) = 1 \Leftrightarrow P(Y = t_o X + \mu_Y - t_o \mu_X) = 1.$$

Entonces, $Y = aX + b$ con probabilidad 1, siendo $a = t_o$ y $b = \mu_Y - t_o \mu_X$. Falta verificar que $a = t_o \neq 0$.

En efecto, si t_o fuese igual a 0, ésto implicaría que $E(V^2) = \mathrm{Var}(Y) = 0$.

($\Leftarrow$) Sea $Y = aX + b$ para ciertos valores $a \neq 0$ y *b*. Entonces

$$\rho(X,Y) = \rho(X, aX+b) = \frac{\mathrm{Cov}(X, aX+b)}{\sigma_X \sigma_{aX+b}} = \frac{E\left(X(aX+b)\right) - E(X)\,E(aX+b)}{\sigma_X\,|a|\,\sigma_X} =$$

$$= \frac{aE\left(X^2\right) + bE(X) - a\left[E(X)\right]^2 - bE(X)}{|a|\,\sigma_X^2} = \frac{a\left(E(X^2) - E^2(X)\right)}{|a|\,\sigma_X^2} = \frac{a\,\sigma_X^2}{|a|\,\sigma_X^2} = \pm 1$$

como queríamos demostrar.