

Vectores aleatorios.

Extensión a más de dos dimensiones

Definición: Sean X_1, \dots, X_k variables aleatorias discretas, la **función de probabilidad conjunta** del vector aleatorio (X_1, \dots, X_k) se define como:

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)$$

y, dado cualquier conjunto $A \subseteq \mathfrak{R}^k$,

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A) = \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in A} \dots \sum p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_k)$
- $\sum_{x_1} \dots \sum_{x_k} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = 1$

En forma similar a lo hecho para el caso bidimensional se pueden definir las **funciones de probabilidad marginal**. Por ejemplo, la función de probabilidad marginal de X_1 está dada por:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} \dots \sum_{x_k} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

y la función de probabilidad marginal de (X_1, X_2) está dada por:

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3} \dots \sum_{x_k} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Distribución multinomial: Es una generalización de la distribución Binomial. Supongamos que se repite n veces en forma independiente una experiencia, que en cada repetición hay k resultados posibles ($k \geq 2$), cada uno de los cuales ocurre con probabilidad p_i ($1 \leq i \leq k$) y que estas probabilidades se mantienen constantes en todas las repeticiones. Este experimento se denomina experimento multinomial. Si definimos

X_i : número de veces que ocurre el resultado i ($1 \leq i \leq k$)

la distribución conjunta de (X_1, \dots, X_k) se denomina distribución multinomial de parámetros n, p_1, \dots, p_k .

Notación: $(X_1, \dots, X_k) \sim M(n, p_1, \dots, p_k)$

La correspondiente función de probabilidad conjunta está dada por

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} & \text{si } 0 \leq x_i \leq n \forall i, \sum_{i=1}^k x_i = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

En efecto, en primer lugar hay que notar que si $x_1 + x_2 + \dots + x_k \neq n$, la función de probabilidad puntual es cero. Sean ahora $0 \leq x_i \leq n$, tales que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Indicando por R_i ($1 \leq i \leq k$) cada uno de los k resultados posibles, una de las posibles configuraciones que producen x_i resultados R_i ($1 \leq i \leq k$), es

$$\underbrace{R_1 \dots R_1}_{x_1} \underbrace{R_2 \dots R_2}_{x_2} \dots \underbrace{R_k \dots R_k}_{x_k}$$

(alguno de los x_i 's podría ser 0, en cuyo caso no aparecería ninguno de los correspondientes R_i).

Como hemos supuesto independencia entre las repeticiones, esa configuración tiene probabilidad $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$, pero es sólo una de las configuraciones posibles que producen x_i resultados R_i para $1 \leq i \leq k$.

¿Cuántas configuraciones diferentes hay?

$$\begin{aligned} \binom{n}{x_1} \cdot \binom{n-x_1}{x_2} \cdot \binom{n-x_1-x_2}{x_3} \dots \binom{x_k}{x_k} &= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \dots \frac{x_k!}{x_k!0!} \\ &= \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \end{aligned}$$

y se obtiene la función de probabilidad dada en (1).

Observación: La distribución marginal de X_i es binomial de parámetros n y p_i para todo $1 \leq i \leq k$. En general, las marginales de una distribución multinomial son binomiales o multinomiales.

Ejemplo: De una urna que contiene 3 bolillas rojas, 2 negras, 4 azules y 1 blanca se extraen 12 bolillas *con reposición*. Definiendo

X_1 : número de bolillas rojas
 X_2 : número de bolillas negras
 X_3 : número de bolillas azules
 X_4 : número de bolillas blancas

el vector (X_1, X_2, X_3, X_4) tiene distribución multinomial, es decir

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) \sim M\left(12, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan 3 bolillas rojas, 5 negras, 4 azules y ninguna blanca?

$$p_{X_1, X_2, X_3, X_4}(3, 5, 4, 0) = \frac{12!}{3!5!4!0!} \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{2}{10}\right)^5 \left(\frac{4}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{10}\right)^0 = 0.006$$

b) Calcular la probabilidad de obtener a lo sumo dos bolillas rojas.

Como $X_1 \sim \text{Bi}\left(12, \frac{3}{10}\right)$, entonces

$$P(X_1 \leq 2) = \sum_{i=0}^2 p_{X_1}(i) = \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} \left(\frac{3}{10}\right)^i \left(\frac{7}{10}\right)^{12-i} = 0.25$$

c) Calcular la probabilidad de obtener 3 bolillas rojas y 2 blancas.

Como las v.a. que nos interesan son X_1 y X_4 , defino una nueva v.a. $Y = X_2 + X_3$. El vector aleatorio (X_1, X_4, Y) también tendrá distribución multinomial.

$$(X_1, X_4, Y) \sim M\left(12, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{6}{10}\right)$$

y, por lo tanto, la probabilidad pedida será

$$p_{X_1, X_4, Y}(3, 2, 7) = \frac{12!}{3!2!7!} \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{6}{10}\right)^7 = 0.06$$

Definición: El vector aleatorio (X_1, \dots, X_k) es continuo si existe una función $f_{X_1, \dots, X_k} : \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^{\geq 0}$, denominada **función de densidad conjunta**, tal que

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A) = \int_A \dots \int f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad \forall A \subseteq \mathfrak{R}^k$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_k)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = 1$

En forma similar a lo hecho para el caso bidimensional se pueden definir las **funciones de densidad marginal**. Por ejemplo, la función de densidad marginal de X_1 está dada por:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k$$

y la función de densidad marginal de (X_1, X_2) , está dada por:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_3 \dots dx_k$$

Definición: X_1, \dots, X_k son variables aleatorias **independientes** si y sólo si

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_k}(x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \quad \text{en el caso discreto}$$

$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_k}(x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_k)$ salvo, eventualmente, en un conjunto de probabilidad cero en el caso continuo.

Ejemplos: 1) En el caso de la distribución multinomial, las componentes del vector aleatorio son v.a. con distribución binomial no independientes y ésto que es intuitivo ya que su suma es constante (es igual a n), puede verificarse aplicando la definición.

2) Sea (X_1, X_2, X_3) un vector aleatorio con distribución uniforme en el prisma de vértices $(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (1,2,0), (0,0,3), (1,0,3), (0,2,3), (1,2,3)$, cuyo volumen es igual a 6. Entonces, su función de densidad conjunta dada por

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es inmediato verificar que las componentes del vector son variables aleatorias independientes, ya que

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \int_0^3 \int_0^2 \frac{1}{6} dx_2 dx_3 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 & \text{si } x_1 \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x_1 \notin [0,1] \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \int_0^3 \int_0^1 \frac{1}{6} dx_1 dx_3 = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2} & \text{si } x_2 \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x_2 \notin [0,2] \end{cases}$$

$$f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} \int_0^2 \int_0^1 \frac{1}{6} dx_1 dx_2 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} & \text{si } x_3 \in [0,3] \\ 0 & \text{si } x_3 \notin [0,3] \end{cases}$$

entonces,

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3)$$

Distribución de la suma de dos variables aleatorias

Sean X e Y dos v.a. de las cuáles se conoce la distribución conjunta. Estamos interesados en la distribución de la v.a. $V = X + Y$.

Consideraremos dos ejemplos, uno para el caso de un vector aleatorio discreto y otro para el caso continuo.

Ejemplos: 1) Sean $X \sim P(\lambda)$ e $Y \sim P(\mu)$, v.a. independientes, y sea $V = X + Y$. Claramente el recorrido de la v.a. V es el conjunto $R_V = \{0,1,2,\dots\}$. Sea $k \in R_V$,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{XY}(i, k-i) = \sum_{i=0}^k p_X(i) p_Y(k-i)$$

por ser X e Y independientes. Entonces,

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k. \end{aligned}$$

Entonces, $V = X + Y$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda + \mu$. O sea

$$X + Y \sim P(\lambda + \mu)$$

Este resultado se extiende por inducción al caso de n v.a. : si X_1, \dots, X_n son v.a. independientes tales que $X_i \sim P(\lambda_i)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces $X_1 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

2) Sean X e Y v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro λ , o sea, sean $X \sim E(\lambda)$ e $Y \sim E(\lambda)$ independientes, y sea $V = X + Y$. La v.a. V toma valores en el intervalo $(0, \infty)$, por lo tanto, si $v \leq 0$, $F_V(v) = 0$. Sea $v > 0$,

$$F_V(v) = P(X + Y \leq v) = \iint_{\{(x,y)/x+y \leq v\}} f_{XY}(x,y) dx dy = \iint_{\{(x,y)/x+y \leq v\}} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

pues X e Y son independientes. Entonces,

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq v) &= \int_0^v \left(\int_0^{v-y} f_X(x) f_Y(y) dx \right) dy = \int_0^v \left(\int_0^{v-y} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx \right) dy = \\ &= \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left(\int_0^{v-y} \lambda e^{-\lambda x} dx \right) dy = \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left(1 - e^{-\lambda(v-y)} \right) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} dy - \int_0^v \lambda e^{-\lambda v} dy = 1 - e^{-\lambda v} - \lambda e^{-\lambda v} v$$

Derivando respecto de v , se obtiene la densidad de $V = X + Y$, que es

$$f_V(v) = (\lambda e^{-\lambda v} + \lambda^2 e^{-\lambda v} v - \lambda e^{-\lambda v}) I_{(0,\infty)}(v) = \lambda^2 e^{-\lambda v} v I_{(0,\infty)}(v)$$

lo que demuestra que V tiene distribución Gamma de parámetros $(2, \lambda)$.

3) Se puede demostrar que, en general, si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$$

Función generadora de momentos de la suma de v.a. independientes: Sean, en principio X e Y dos v.a. independientes, entonces la función generadora de la suma $X + Y$ es el producto de las funciones generadoras, es decir

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

En efecto, si por ejemplo X e Y son dos v.a. continuas e independientes,

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E(e^{t(X+Y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+y)} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{ty} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_Y(y) dy = E(e^{tX}) E(e^{tY}) = M_X(t) M_Y(t) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Para el caso discreto, se demuestra en forma similar.

Es inmediato verificar que si X_1, X_2, \dots, X_n son v.a. independientes,

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Ejemplos: 1) Demostraremos, usando funciones generadoras de momentos que si $X \sim P(\lambda)$ e $Y \sim P(\mu)$ son v.a. independientes, $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$. En efecto,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)} e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$

y se obtiene la función generadora de momentos de una v.a. Poisson con parámetro $(\lambda + \mu)$. Recordemos que la función generadora de momentos determina la distribución de la v.a..

2) Demostraremos ahora, usando funciones generadoras de momentos que si X e Y son v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro λ , o sea $X \sim E(\lambda)$ e $Y \sim E(\lambda)$, entonces $V = X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$. En efecto,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t} \frac{\lambda}{\lambda-t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^2$$

y se obtiene la función generadora de momentos de una v.a. $\Gamma(2, \lambda)$.

Sumas y promedios de variables aleatorias

En la página 100, demostramos que

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2).$$

¿Qué ocurre con la varianza de una combinación lineal de dos variables aleatorias?

$$\begin{aligned} V(a_1 X_1 + a_2 X_2) &= E\left[\left((a_1 X_1 + a_2 X_2) - E(a_1 X_1 + a_2 X_2)\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left((a_1 X_1 + a_2 X_2) - (a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2)\right)^2\right] = E\left[\left((a_1 X_1 - a_1 \mu_1) + (a_2 X_2 - a_2 \mu_2)\right)^2\right] = \\ &= E\left(a_1^2 (X_1 - \mu_1)^2 + a_2^2 (X_2 - \mu_2)^2 + 2E[a_1 a_2 (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]\right) = \\ &= a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + 2a_1 a_2 \text{cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

La siguiente proposición generaliza estos resultados para todo $n \geq 2$.

Proposición: Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. cualesquiera con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$ y a_1, a_2, \dots, a_n números reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \tag{1}$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j)$$

Dem: En primer lugar, probemos la expresión para la esperanza mediante inducción en n .

Como dijimos, ya lo hemos demostrado para $n=2$, supongamos ahora que la expresión es cierta para $n = k$ y probémosla para $n = k + 1$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i + a_{k+1} X_{k+1}\right) = E(Y + a_{k+1} X_{k+1})$$

siendo $Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i$. Como para $n = 2$ se cumple, se obtiene

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i\right) = E(Y + a_{k+1} X_{k+1}) = E(Y) + a_{k+1} E(X_{k+1}) = E\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right) + a_{k+1} \mu_{k+1}$$

y, utilizando la hipótesis inductiva

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i + a_{k+1} \mu_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \mu_i$$

como queríamos demostrar.

Probemos ahora la expresión correspondiente a la varianza.

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j X_j\right) - E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) E\left(\sum_{j=1}^n a_j X_j\right) = \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j X_i X_j\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i\right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j\right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E(X_i X_j)\right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \mu_i \mu_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si $i = j$, $\text{cov}(X_i, X_i) = V(X_i)$ y que $\text{cov}(X_i, X_i) = \text{cov}(X_j, X_j)$, obtenemos el resultado que queríamos demostrar.

Corolario: Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. **independientes** con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$ y a_1, a_2, \dots, a_n números reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

Dem: Resulta inmediatamente del hecho que, por ser las v.a. independientes,

$$\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Corolario: Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. **independientes e idénticamente distribuidas** (i.i.d.) con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, n$ y a_1, a_2, \dots, a_n números reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \mu \sum_{i=1}^n a_i \quad V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Dem: Se verifica inmediatamente a partir del corolario anterior.

Propiedad: Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, n$, entonces

$$\text{a) } E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mu \quad V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2$$

$$\text{b) } E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \mu \quad V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Dem: Ejercicio.