

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 4

1. En la siguiente tabla se presenta la función de probabilidad conjunta del vector aleatorio discreto (X, Y) :

$Y \setminus X$	1	2	3	4
1	0.10	0.05	0.02	0.02
2	0.05	0.20	0.05	0.02
3	0.02	0.05	0.20	0.04
4	0.02	0.02	0.04	0.10

- a) Hallar las funciones de probabilidad marginal de X y de Y : $p_X(x)$ y $p_Y(y)$ respectivamente.
- b) Calcular la probabilidad de que tanto X como Y sean menores que 3.
- c) Calcular la probabilidad de que X sea par e Y sea impar.
2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es el valor de k ?
- b) Hallar las funciones de densidad marginal de X y de Y : $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ respectivamente.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto X como Y sean menores que 2.6?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que $\max(X, Y) < 2.6$?
3. De un grupo de tres profesores, dos graduados y un alumno debe seleccionarse al azar una comisión de dos personas. Sean X el número de profesores e Y el número de graduados en la comisión.
- a) Hallar la función de probabilidad conjunta del par (X, Y) y las marginales de X e Y .
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no forme parte de la comisión?
4. Sea (X, Y) un v.a. bidimensional continuo con distribución uniforme en el trapecio de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.
- a) Hallar la función de densidad conjunta de (X, Y) .
- b) Calcular $P(Y \leq X)$.
- c) Hallar las funciones de densidad marginal $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

5. En los ejercicios 1 a 4:
- Decir si X e Y son independientes, justificando en cada caso.
 - Hallar las funciones de probabilidad o de densidad condicional, según corresponda.
6. Para iluminar sin interrupción una sala se cuenta con dos lamparitas; cuando se quema una, se coloca la otra. Sean X e Y los tiempos de vida de cada lamparita (en 10^3 horas) y supóngase que esos tiempos son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(1)$.
- Hallar la densidad conjunta de (X, Y) .
 - Hallar la probabilidad de que la sala permanezca iluminada al menos 2000 horas.
7. Dos servidores A y B procesan trabajos a medida que van llegando. El tiempo que tarda el servidor A en procesar un trabajo es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, mientras que el tiempo que tarda el servidor B es una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. Ambos servidores actúan en forma independiente.
- Dos trabajos llegan simultáneamente y es atendido uno por A y otro por B . ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor A termine con su trabajo antes que B ?
 - Supongamos que tres trabajos llegan simultáneamente. Uno es atendido por A , otro por B y el tercero queda esperando a que uno de los servidores se libere. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, pruebe que la probabilidad de que el último trabajo en ser atendido sea el último en ser completado es 0.5.
8. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.
- Hallar la distribución de Y dado $X = a$, para $a = 0, 1, 2, 3$.
 - Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) y hallar la función de probabilidad marginal p_Y .
 - ¿Son X e Y independientes?
 - Si exactamente 2 de las bolillas extraídas son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?
9. Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además se supondrá que estos tiempos son independientes.
- ¿Cuál es la densidad conjunta de (X, Y) ?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 20:15 y las 20:45?
 - Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?

10. En los ejercicios 1 a 4, calcular:
- $\text{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.
 - $E(X + Y)$ y $V(X + Y)$.
11. a) Probar que si X e Y son v.a. independientes entonces $\text{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.
b) Mostrar con un ejemplo que la recíproca no es cierta en general.
(SUGERENCIA: Sean U y V dos v.a. independientes pero con la misma distribución. Considerar $X = U + V$ e $Y = U - V$.)
c) Mostrar que si $Y = aX + b$ ($a \neq 0$), entonces $\rho(X, Y) = \pm 1$. ¿Cuándo es $\rho(X, Y) = 1$ y cuándo es -1 ?
d) Sean σ_X^2 y σ_Y^2 las varianzas de las v.a. X e Y ,
i. Utilizando que: $V\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$, verificar que $\rho(X, Y) \geq -1$
ii. Utilizando además que: $V\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$, verificar que $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
12. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en la región: $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq x + h$ para algún $0 < h < 1$.
- Hallar las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.
 - Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.
 - Verificar que $V(Y) = \frac{1}{12}(h^2 + 1)$. Hallar ρ_{XY} .
 - ¿A qué tiende ρ_{XY} cuando h tiende a cero? ¿Por qué?
13. Sea X una variable aleatoria con densidad $\mathcal{U}[0, 1]$. Si $X = x$, se elige un número Y entre 0 y x . Por lo tanto $Y|_{X=x} \sim \mathcal{U}[0, x]$.
- Hallar la densidad conjunta del par (X, Y) y la densidad marginal f_Y .
 - Calcular $E(Y)$, $V(Y)$, $\text{cov}(X, Y)$ y $\text{cov}(X, X + Y)$.
14. Se va a guardar un archivo de longitud 100 caracteres, cada uno de los cuales toma el valor A, B, C ó D. Las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos caracteres son $p_A = 0.70$, $p_B = 0.12$, $p_C = 0.10$ y $p_D = 0.08$. Se definen las variables aleatorias:
A: número de veces que ocurre la letra A.
B: número de veces que ocurre la letra B.
etc. Suponiendo independencia entre los caracteres del archivo:
- ¿Qué distribución tiene el vector aleatorio (A, B, C, D) ?
 - Hallar las distribuciones marginales de A, B, C y D .
 - Para ahorrar memoria se decide representar estos caracteres según la siguiente tabla basada en el código de Huffman.

Letra	Código
A	1
B	00
C	011
D	010

Sea X : tamaño del archivo codificado (en bits). Hallar $E(X)$.

15. La longitud (en cm) de ciertas varillas de metal tiene distribución $N(5, 0.25)$. Para hacer un control de calidad se eligen 40 varillas al azar. Hallar la probabilidad de que 1 varilla mida menos de 4 cm, 13 varillas midan entre 4 y 4.8 cm, 18 varillas midan entre 4.8 y 5.5 cm, y el resto de las varillas mida más de 5.5 cm.
16. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a. i.i.d.) con función de distribución F_X . Se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned} T &= \text{máx}(X_1, \dots, X_n) \\ U &= \text{mín}(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

- a) Probar que $F_T(t) = [F_X(t)]^n$.
- b) Probar que $F_U(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n$.
- c) Si las variables X_i tienen densidad $f_X(x)$,
- hallar las densidades de T y U .
 - escribir las integrales que dan $E(T)$ y $E(U)$.
- d) Si las variables X_i tienen distribución $U(0,1)$, hallar $E(T)$, $E(U)$ y la esperanza del rango $T - U$. ¿Qué relación (de orden) debería haber entre $E(T)$, $E(U)$ y $E(X_i)$? ¿Se cumple?.
17. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución $U(2,2.5)$ y considerando que las tres alturas alcanzadas son independientes
- Hallar la función de distribución del puntaje.
 - Hallar el valor esperado del puntaje.
18. Sean X e Y v.a. independientes, tales que $X \sim Bi(n, p)$ e $Y \sim Bi(m, p)$. Probar que:
- $X + Y \sim Bi(n + m, p)$.
(NOTA: $\sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.)
 - La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $\mathcal{H}(k, n, m + n)$.
19. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie A y 11 de la especie B para experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1, y se considera que las ratas mueren en forma independiente.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?
- b) Si murieron 2, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie A?
20. a) Sean X e Y v.a. independientes, ambas con distribución $\mathcal{G}(p)$. Probar que $X + Y \sim BN(2, p)$.
- b) Sean X e Y v.a. independientes, X con distribución $\mathcal{G}(p)$ e Y con distribución $BN(r, p)$. Probar que $X + Y \sim BN(r + 1, p)$.
- (NOTA: $\sum_{j=1}^{k-r} \binom{k-j-1}{r-1} = \binom{k-1}{r}$ para todo $k \geq r + 1$.)
21. Sean X_1, \dots, X_n v.a. i.i.d.. Se define $S = \sum_{i=1}^n X_i$.
- a) Calcular $E(S)$ y $V(S)$ para los siguientes casos:
- $X_i \sim Bi(1, p)$.
 - $X_i \sim \mathcal{G}(p)$.
- b) Usando los Ejercicios 18 y 20, hallar la distribución de S para los dos casos anteriores.
- c) Deducir de (a) y (b) la esperanza y la varianza de variables aleatorias con distribución $Bi(n, p)$ y $BN(r, p)$.
22. a) Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Probar que:
- $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
 - La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $Bi\left(k, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.
- b) Sean X e Y v.a. tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|_{X=k} \sim Bi(k, p)$. Probar que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.
23. Dos terminales A y B están conectadas a un servidor. La cantidad de requerimientos que realiza la terminal A en el lapso de un segundo sigue una distribución $\mathcal{P}(2)$ mientras que para la terminal B sigue una distribución $\mathcal{P}(3)$. Ambas terminales actúan en forma independiente.
- Hallar la probabilidad de que en un segundo haya más de 3 requerimientos al servidor.
 - Si en un determinado segundo hubo dos requerimientos al servidor, ¿cuál es la probabilidad de que haya provenido uno de cada terminal?
 - Si el 30% de los requerimientos necesita grabar en disco (y el 70% restante no), hallar el valor esperado para la cantidad de requerimientos de disco en el lapso de 15 segundos.