

Probabilidades y Estadística (C)

Funciones de probabilidad puntual (p_X) o densidad densidad (f_X), esperanzas, varianzas y funciones generadoras (M_X) de las variables aleatorias más frecuentes

I. Distribuciones discretas

Distribución Binomial $Bi(n, p)$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ y } 0 < p < 1$$

$$E(X) = np$$

$$\text{var}(X) = np(1-p), \quad M_X(t) = [pe^t + (1-p)]^n$$

Un caso particular de la distribución binomial es cuando $n = 1$. Esta distribución suele denominarse *Bernoulli* de parámetro p , $Be(p) = Bi(1, p)$.

Distribución Geométrica $Ge(p)$

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{si } k = 1, 2, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad M_X = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

Distribución Binomial Negativa (o de Pascal) $BN(r, p)$

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots \text{ y } 0 < p < 1$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$\text{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}, \quad M_X = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^r$$

La distribución geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa: $Ge(p) = BN(1, p)$.

Distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{si } k = 0, 1, 2, \dots \text{ y } \lambda > 0$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{var}(X) = \lambda, \quad M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Distribución Hipergeométrica $\mathcal{H}(N, B, m)$

N : total poblacional

B : cantidad de “buenos” en la población

m : cantidad de elementos extraídos (tamaño de la muestra)

$$p_X(k) = \frac{\binom{B}{k} \binom{N-B}{m-k}}{\binom{N}{m}} \quad \text{si } k \text{ es entero con } \max(B+m-N, 0) \leq k \leq \min(B, m)$$

$$E(X) = m \frac{B}{N}$$

$$\text{var}(X) = m \frac{B}{N} \frac{(N-B)}{N} \frac{(N-m)}{(N-1)}$$

II. Distribuciones continuas

Distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con } \sigma > 0$$
$$E(X) = \mu$$
$$\text{var}(X) = \sigma^2$$
$$M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$$

Distribución Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{con } \lambda > 0, \alpha > 0$$
$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$\text{var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$
$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \mathbb{I}_{(-\infty, \lambda)}(t)$$

Recordemos que el símbolo $\Gamma(\alpha)$ representa a la *función gamma* que se define por

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx \quad \text{si } y > 0$$

Satisface las siguientes propiedades:

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$$
$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

La distribución χ_n^2 (chi cuadrado n) es un caso particular de la distribución gamma, $\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Distribución Exponencial $Exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad \text{con } \lambda > 0$$
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t} \mathbb{I}_{(-\infty, \lambda)}(t)$$

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma: $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.

Distribución Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$