PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 4

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k\left(x^2 + y^2\right) & 20 \leq x \leq 30,\ 20 \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) ¿Cuál es el valor de k?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto X como Y sean menores que 26?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que $\max(X, Y) < 26$?
   d) Hallar f_X y f_Y, las funciones de densidad marginales.

2. De un grupo de tres profesores, dos graduados y un alumno debe seleccionarse al azar una comisión de dos personas. Sean X el número de profesores e Y el número de graduados en la comisión.

   a) Hallar la función de probabilidad conjunta del par (X, Y) y las marginales de X e Y.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no forme parte de la comisión?

3. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua con distribución uniforme en el trapecio de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

   a) Hallar la función de densidad conjunta de (X, Y).
   b) Calcular $P(Y \leq X)$.
   c) Hallar las funciones de densidad marginales f_X y f_Y.

4. En los ejercicios 1 a 3:

   a) Decir si X e Y son independientes (justificando en cada caso).
   b) Hallar las funciones de probabilidad puntual condicional o de densidad condicional, según corresponda.

5. Para iluminar sin interrupción una sala (de computadoras!) se cuenta con dos lamparitas; cuando se quema una, se coloca la otra. Sean X e Y los tiempos de vida de cada lamparita (en 10^3 horas) y supóngase que esos tiempos son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(1)$.

   a) Hallar la densidad conjunta de (X, Y).
   b) Hallar la probabilidad de que la sala permanezca iluminada al menos 2000 horas.

6. Dos servidores A y B procesan trabajos a medida que van llegando. El tiempo que tarda el servidor A en procesar un trabajo es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, mientras que el tiempo que tarda el servidor B es una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. Ambos servidores actúan en forma independiente. Dos trabajos llegan simultáneamente y son atendidos uno por A y otro B. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor A termine con su trabajo antes que B?

7. (Optativo) Retomemos el problema anterior y supongamos que tres trabajos llegan simultáneamente. Uno es atendido por A, otro por B y el tercero queda esperando a que uno de los servidores se libere. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, pruebe que la probabilidad de que el último trabajo en ser atendido sea el último en ser completado es 0.5.

8. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.

   a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$, para $a = 0, 1, 2, 3$.
   b) Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) y hallar la función de probabilidad puntual marginal p_Y.
   c) ¿Son X e Y independientes?
   d) Si se extrajeron 2 bolillas blancas, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?

9. Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además se supondrá que estos tiempos son independientes.

   a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 20:15 y las 20:45?
   c) Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?

10. En los ejercicios 1 a 3, calcular:

    a) $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.
    b) $E(X + Y)$ y $V(X + Y)$.

11. a) Probar que si X e Y son v.a. independientes entonces $\operatorname{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.
    b) Mostrar con un ejemplo que la recíproca no es cierta en general.
    (Sugerencia: Sean U y V dos v.a. independientes pero con la misma distribución, por ej.: el resultado de arrojar dos dados. Considerar $X = U + V$ e $Y = U - V$.)
    c) Mostrar que si $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$, entonces $\rho(X, Y) = \pm 1$. ¿Cuándo es $\rho(X, Y) = 1$ y cuándo es -1?

12. (Optativo) Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en la región: $0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq x+h$ para todo $0 < h < 1$.

    (a) Calcular $E(X), E(Y), E(XY)$.

    (b) Hallar ρ_{XY}.

    (c) ¿A qué tiende ρ_{XY} cuando h tiende a cero? ¿Por qué?

13. Sea X una variable aleatoria con densidad $\mathcal{U}[0,1]$. Si $X = x$, se elige un número Y entre 0 y x. Por lo tanto $Y|_{X=x} \sim \mathcal{U}[0,x]$.

    a) Hallar la densidad conjunta del par (X, Y) y la densidad marginal f_Y.

    b) Calcular $E(Y)$, $V(Y)$, $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\operatorname{cov}(X, X+Y)$.

14. Se va a guardar un archivo de longitud 100 caracteres, cada uno de los cuales toma el valor A, B, C ó D. Las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos caracteres son $p_A = 0{,}70$, $p_B = 0{,}12$, $p_C = 0{,}10$ y $p_D = 0{,}08$. Se definen:

    A: número de veces que ocurre la letra A.

    B: número de veces que ocurre la letra B.

    etc. Suponiendo independencia:

    a) ¿Qué distribución tiene el vector aleatorio (A, B, C, D)?

    b) Hallar las distribuciones marginales de A, B, C y D.

    c) Para ahorrar memoria se decide representar estos caracteres según la siguiente tabla basada en el código de Huffman.

Letra	Código
A	1
B	00
C	011
D	010

    Sea X = Tamaño del archivo codificado (en bits).

    d) Hallar $E(X)$.

15. La longitud de ciertas varillas de metal tiene distribución $N(5,\ 0{,}25)$. Para hacer un control de calidad se eligen 40 varillas al azar. Hallar la probabilidad de que 1 varilla mida menos de 4 cm, 13 varillas midan entre 4 y 4.8 cm, 18 varillas midan entre 4.8 y 5.5 cm, y el resto de las varillas mida más de 5.5 cm.

16. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas) con función de distribución F_X. Se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned} T &= \max(X_1, \ldots, X_n) \\ U &= \min(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

    a) Probar que $F_T(t) = [F_X(t)]^n$.

b) Probar que $F_U(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n$.

c) Si las variables X_i tienen densidad $f_X(x)$, hallar las densidades de U y T.

17. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución $\mathcal{U}[2, 2{,}5]$ y considerando que las tres alturas alcanzadas son independientes:

    a) Hallar la función de distribución del puntaje.

    b) Hallar el valor esperado del puntaje.

18. Sean X e Y v.a. independientes, tales que $X \sim\ Bi(n, p)$ e $Y \sim\ Bi(m, p)$. Probar que:

    a) $X + Y \sim\ Bi(n + m, p)$.
    (Nota: $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.)

    b) La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $\mathcal{H}\,(k, n, m + n)$.

19. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie A y 11 de la especie B para experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1, y se considera que las ratas mueren en forma independiente.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?

    b) Si murieron 2, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie A?

20. Sean X e Y v.a. independientes, ambas con distribución $\mathcal{G}(p)$. Probar que $X + Y \sim BN(2, p)$.

21. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d.. Se define $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

    a) Calcular $E\,(S)$ y $V\,(S)$ para los siguientes casos:
    i. $X_i \sim Bi\,(1, p)$.
    ii. $X_i \sim \mathcal{G}\,(p)$.

    b) Usando los Ejercicios 18 y 20, hallar la distribución de S para los dos casos anteriores.

    c) Deducir de (a) y (b) la esperanza y la varianza de variables aleatorias con distribución $Bi\,(n, p)$ y $BN\,(r, p)$.

22. Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Probar que:

    a) $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

    b) La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $Bi\left(k, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

    c) Sean X e Y v.a. tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|_{X=k} \sim Bi\,(k, p)$. Probar que $Y \sim \mathcal{P}\,(\lambda p)$.

23. Dos terminales A y B están conectadas a un servidor. La cantidad de requerimientos que realiza la terminal A en el lapso de un segundo sigue una distribución $\mathcal{P}(2)$ mientras que para la terminal B sigue una distribución $\mathcal{P}(3)$. Ambas terminales actúan en forma independiente.

    a) Hallar la probabilidad de que en un segundo haya más de 3 requerimientos al servidor.
    b) Si en un determinado segundo hubo dos requerimientos al servidor, ¿cuál es la probabilidad de que haya provenido uno de cada terminal?
    c) Si el 30 % de los requerimientos necesita grabar en disco (y el 70 % restante no), hallar el valor esperado para la cantidad de requerimientos de disco en el lapso de 15 segundos.

24. Pruebe que la función generadora de cada una de las siguientes distribuciones es la indicada en el cuadro:

$Bi(n,p)$	$[pe^t + (1-p)]^n$
$P(\lambda)$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$
$E(\lambda)$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$
$U(a,b)$	$\dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
$\Gamma(\alpha,\lambda)$	$\left[\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right]^\alpha$