Probabilidades y Estadística (M)

Práctica 2

Paseos al azar

1. Sea $x > 0$ e y dos enteros. Un paseo $(s_0, s_1, \ldots, s_x)$ del origen al punto (x, y) es una poligonal cuyos vértices tienen abscisas $0, 1, 2, \ldots, x$ y ordenadas $s_0, s_1, \ldots, s_x$ tales que:

$$s_x = y \qquad s_0 = 0 \qquad s_i - s_{i-1} = \varepsilon_i = \pm 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, x$$

O sea en cada paso puede subir o bajar 1.

Si hay p ε_i positivos y q negativos entonces: $\left.\begin{array}{l} x = p + q \\ y = p - q \end{array}\right\}$

(a) Un punto arbitrario (x, y) puede ser unido al origen por un paseo sólo existen p y q tales que $x = p + q$ e $y = p - q$.

(b) Sea $N_{x,y}$ el número de paseos distintos del origen al punto (x, y). Hallar $N_{x,y}$.

(c) Calcular el número de paseos posibles del origen a puntos (n, y) con y arbitrario.

2. (a) Principio de reflexión

Sea $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$ enteros $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Un paseo de A a B se define como antes considerando a A como origen. Sea A' el simétrico de A respecto del eje x Probar que el número de paseos que van de A a B que tocan o cruzan al eje x es igual al número de paseos de A' a B

(b) Sean $x > 0$, $y > 0$. Entonces el número de paseos del origen a (x, y) tales que

$s_1 > 0 \quad s_2 > 0 \quad \ldots \quad s_x = y > 0$ es $\dfrac{y}{x} N_{x,y}$

(c) Problema del escrutinio

Supongamos que en una elección, el candidato P obtiene p votos y el candidato Q, q votos, con $p > q$. La probabilidad de que a través de todo el escrutinio haya siempre más votos para P que para Q es $\dfrac{p-q}{p+q}$.

(d) 100 personas hacen cola en la boletería de un teatro. La entrada cuesta \$ 5. 60 personas no tienen más que billetes de \$ 5 y 40 no tienen más que billetes de \$ 10. No hay dinero en la caja al abrir la boletería. ¿ Cuál es la probabilidad de que la venta de entradas se desarrolle sin pararse, es decir sin que se presente ninguna persona que tenga billetes de \$ 10 para adquirir la entrada cuando no hay billetes de \$ 5 en caja?

3. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente.

Urna A: 5 bolitas rojas y 3 blancas

Urna B: 1 bolita roja y 2 blancas

Se arroja un dado equilibrado. Si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolita de la urna A que se coloca en B y luego se extrae una bolita de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

(a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

(b) Si ambas bolitas son del mismo color, cuál es la probabilidad de que sean blancas?

4. Hay 3 cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de B, y la de C es igual a su suma. Eligiendo al azar una caja se sacan con reposición 2 piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que provengan de la caja A.

5. Supongamos que una prueba de laboratorio para diagnosticar cierta enfermedad es tal que

$$P(A/E) = P(A^C/E^C) = 0.95$$

siendo E el suceso: "la persona examinada contrajo la enfermedad" y A el suceso: "el resultado de la prueba indica que la persona examinada contrajo la enfermedad".
Supongamos que la probabilidad de que una persona que se examina padezca la enfermedad es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que según la prueba contrajo el mal en realidad lo padezca?

   (a) Sean ahora
$$P(A/E) = P(A^C/E^C) = p \qquad P(E) = 0.005$$

   (b) ¿Para qué valor de p es $P(E/A) = 0.95$? Interpretar la respuesta.

6. Se tienen $n+1$ urnas numeradas $0, 1, \ldots, n$. La urna i tiene i bolillas blancas y $n-i$ negras. Se elige al azar una urna.

   (a) Se extrae de ella una bolilla al azar.
      i. Hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.
      ii. Si la bolilla extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna i, $0 \leq i \leq n$?

   (b) Se realizan k extracciones con reposición de una urna elegida al azar.
      i. Hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.
      ii. Sabiendo que las k bolillas extraídas son blancas, si se realiza una nueva extracción, ¿cuál es la probabilidad de que esta última bolilla sea blanca?

7. Consideremos el siguiente experimento llamado "esquema de Polya". De un bolillero que contine B bolillas blancas, $B \geq 1$ y R rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \geq 1$.

   (a) Hallar la probabilidad de que
      i. Se obtenga una roja en la segunda extracción.
      ii. Se obtenga una roja en la n-ésima extracción.
      iii. Se obtenga una roja en la segunda extracción y una bolilla blanca en la tercera extracción.

   (b) Hallar la probabilidad de que

i. se obtenga una roja en la tercera extracción dado que en la segunda se obtuvo una roja.

ii. se haya obtenido una roja en la primera extracción dado que se obtuvo una roja en la n-ésima.

(c) Hallar la probabilidad de que

i. se obtenga por lo menos una roja en las dos primeras extracciones sabiendo que exactamente una roja se ha obtenido en las 3 primeras extracciones.

ii. la primera roja salga en la segunda extracción sabiendo que al menos una roja se obtuvo en las 3 primeras extracciones.

8. (a) Un dado se tira tantas veces como sea necesario para que aparezca un as. Suponiendo que el as no aparece en el primer tiro, ¿cuál es la probabilidad de que sean necesarios más de 3 tiros?

(b) Supongamos que el número de tiros sea par, ¿cuál es la probabilidad de que sea 2?

9. Sean a, b y c tres jugadores que juegan por turnos a un juego que nunca se empata de acuerdo con la siguiente regla:
Empiezan a y b. El perdedor es reemplazado por c. El juego continúa de esta manera (el ganador juega con el que estaba afuera) hasta que un jugador gane 2 veces consecutivas convirtiéndose en el ganador del juego.

(a) Escribir un espacio muestral.

(b) Supongamos que en cada partido cada uno de los 2 jugadores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar. Calcular:

i. $P(a \quad a)$; $P(a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad b)$

ii. Sea A_4 el suceso el juego termina en el cuarto encuentro. Calcular $P(A_4)$.

iii. Sea $w = (a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad \ldots \quad)$. Calcular $P(w)$.

iv. Mostrar que la probabilidad de que a gane es $\frac{5}{14}$ y calcule la de los otros dos.

10. Se extrae al azar una bolilla de una urna que tiene 9 bolillas de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas, numeradas 1, 2, 3 en cada color. Además las siguientes bolillas son rayadas: n° 1 blanca, n° 2 negra y n° 3 roja.
Sean los sucesos:
A: "la bolilla es n° 1"
B: "la bolilla es blanca "
C: "la bolilla es rayada "

(a) ¿Son independientes de a pares A, B y C?

(b) ¿Son independientes los sucesos A, B y C?

11. Sean $S_1 \ldots S_n$ sucesos independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Hallar la probabilidad de que de los S_i ocurra:

(a) al menos uno

(b) exactamente uno

(c) ninguno

(d) exactamente k en el caso $P(S_i) = p \qquad 1 \leq i \leq n.$

12. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la n-ésima tirada, sabiendo que salió por lo menos una vez entre las $(m+n)$ primeras tiradas? $m \geq 1$.

13. (a) Probar que el suceso A es independiente de cualquier suceso B si y sólo si $P(A) = 1$ ó 0.

    (b) Si $A \subset B$ y A y B son independientes entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.

    (c) Probar que si:

    i. A es independiente de $B \cap C$ y $B \cup C$

    ii. B es independiente de $A \cap C$

    iii. C es independiente de $A \cap B$

    iv. $P(A), P(B), P(C) > 0$
    entonces A, B y C son independientes.

    v. Probar que si $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^C$, siendo A_i independientes $\quad 1 \leq i \leq n$ entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i)$$

    con lo cual $B_1 \ldots B_m$ son independientes $\quad \forall \quad 1 \leq m \leq n.$

14. Una bolilla está en una de n cajas. Sea p_i la probabilidad de que esté en la caja i. Una persona le da un vistazo a las cajas. Si la bolilla está en la caja i, la probabilidad de que la vea es α_i. Calcular la probabilidad de que la bolilla esté en la caja j, dado que al mirar en la caja i no la vio.
Hint: Considerar los casos $j = i$, $j \neq i$

15. Un modelo simplificado del pronóstico del tiempo
Supongamos que el tiempo (seco o lluvioso) de mañana tendrá probabilidad p de ser el mismo que el de hoy.

    (a) Si el día 1^0 de enero fue lluvioso, mostrar que $p_n =$ probabilidad de que el día (n+1)-ésimo de ese año sea lluvioso satisface

$$\begin{cases} p_n &= (2p-1)p_{n-1} + (1-p) \quad n \geq 1 \\ p_0 &= 1 \end{cases}$$

    (b) Probar que

$$p_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^n] \quad n \geq 0$$

16. Se eligen al azar e independientemente dos puntos en $[0, 1]$. Hallar la probabilidad de que los segmentos determinados sean los lados de un triángulo.