Probabilidades y Estadística (M)

Práctica 3

1. Sea X una v.a. con función de distribución acumulada

   (a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -3 \\ \frac{1}{4} & si \quad -3 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   y sean $A = [-3, 1]$, $B = (\frac{1}{2}, 3)$.Calcular $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/A)$ y obtener la función de probabilidad puntual de X.

   (b) Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{6} & si \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & si \quad 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & si \quad x > 6 \end{cases}$$

      1. Graficar la función de distribución. La v.a. es continua o discreta?
      2. Sean $A = [1, 5]$, $B = (1/2, 3)$. Calcular $P(A)$, $P(B/A)$, $P(B/A^c)$.

2. Sea el espacio de probabilidades $(\Re, \mathcal{B}_1, \mathcal{P})$ donde:

$$P(A) = \int_{A \cap [0,3]} \frac{2}{9} x \, dx$$

   (a) Calcular

      1. $P([a, b])$ $\quad a < b \leq 0$
      2. $P([0, t])$ $\quad t > 0$
      3. $P([0, t))$ $\quad t > 0.$

   (b) Sea $X : \Re \to \Re$ la variable aleatoria definida por:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t^2 & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq t < 2 \\ t - 1 & si \quad t \geq 2 \end{cases}$$

   Hallar F_X

(c) Consideremos ahora las variables:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & si \quad t \leq -1 \\ 1 & si \quad -1 < t \leq 1 \\ -1 & si \quad t > 1 \end{cases}$$

$$Z(t) = \begin{cases} t & si \quad t < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 3 - t & si \quad t > 2 \end{cases}$$

Calcular F_Y, F_Z y $P(Y < Z)$.

3. Se dispone de dos dados, uno equilibrado y otro cargado de manera tal que los números 1 y 2 tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y los restantes $\frac{1}{12}$. Se elige una dado al azar y se arroja 3 veces. Sea X : "número de veces que sale 1 ó 2".

   (a) Hallar la función de probabilidad puntual de X.

   (b) Dado que $X = 3$, cuál es la probabilidad de que haya elegido un dado cragado?

4. Sobre el escritorio de una secretaria hay 4 cartas y 4 sobres correspondientes a las cartas. Se introducen en los sobres al azar las cartas; sea:

$$X = n^\circ \text{ de cartas correctamente introducidas}$$

   Hallar p_X y F_X.

5. En una fábrica la proporción de piezas defectuosas que se fabrican es 0.02. Se toma una muestra con reposición de tamaño n. Hallar:

   (a) la probabilidad de 0 defectuosas.

   (b) la probabilidad de que haya más buenas que defectuosas.

   (c) la probabilidad de al menos 2 defectuosas.

   (d) ¿Cuál es el número más probable de piezas defectuosas en la muestra cuando $n = 4$ y $n = 100$?.

6. Hallar el número de niños que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de tener al menos un varón sea $\geq \frac{3}{4}$.

7. En una sucesión de ensayos Bernoulli con probabilidad p de éxito, encontrar la probabilidad de que ocurran por lo menos A éxitos antes de B fracasos.
   Hint: El problema se decide después de no más de $A+B-1$ ensayos. Esto contesta la pregunta acerca de la manera de dividir la apuesta cuando el juego se interrumpe en el momento en que a un jugador le faltan A puntos para ganar y al otro B puntos.

8. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.

   (a) Describir un espacio muestral asociado a este experimento.

   (b) Encontrar las funciones de probabilidad puntual y de distribución asociadas a X.

   (c) Calcular la probabilidad de que haga falta un número par de tiradas.

   (d) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de tiradas hasta el tercer as. Obtener la distribución de Y (distribución binomial negativa).

9. Una rueda de ruleta está dividida en 38 secciones, de las cuales 18 son rojas, otras 18 negras y las 2 restantes son verdes. Sea X el número necesario de juegos para obtener una sección verde en jugadas independientes.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 jugadas sean necesarias?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarias un número impar de jugadas?

10. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p, $(0 < p < 1)$.

    (a) Verificar que si s y t son números naturales, entonces

    $$P(X \geq s + t / X > t) = P(X \geq s)$$

    (Propiedad de "falta de memoria o desgaste").

    (b) Probar que la única distribución discreta con esta propiedad es la geométrica, de parámetro $p = P(X = 1)$.

11. Un comprador de componentes eléctricas los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar inspecciona 3 componentes elegidas al azar del lote, y lo aceptará si todas las componentes elegidas no tienen fallas. Si el 30% de los lotes tienen 4 componentes defectuosas y el 70% sólo una, ¿qué proporción de lotes rechazará el comprador?

12. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en el cual hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma una muestra de 8 de los cuales, al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable. ¿Cuál es la probabilidad de que compre si en realidad hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables?

13. Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ.

    (a) Mostrar que $P(X = i)$ crece en forma monótona en función de i y luego drecece alcanzando su máximo cuando i es el mayor entero menor o igual que λ.

    (b) Hallar el valor de λ que maximiza $P(X = i)$, $i \geq 0$.

14. En un concurso de pesca cada pescador paga \$ 100 por participar. Las cantidades de peces que cada uno de los pescadores puede obtener durante el desarrollo del concurso es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4.5$. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de \$ 50 por cada pieza. Calcular la función de probabilidad de la ganancia neta.

15. Un minorista ha verificado que la demanda de cajones es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ cajones. Completa su existencia los lunes por la mañana a fin de tener 4 cajones al principio de la semana. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?

    (c) ¿Con cuántos cajones deberá iniciar la semana a fin de que la probabilidad de cumplir con los pedidos sea del 99%?

    (d) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?

    (e) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos por semana?.

16. Se tienen 3 fuentes radiactivas F_1, F_2 y F_3. El número de partículas que emite cada fuente es una variable de Poisson con λ_i partículas por hora, siendo $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Un investigador elige una fuente al azar y mide 4 partículas en una hora. ¿Cuál es la probabilidad de haber elegido la fuente F_2?.

17. Un dado está cargado de tal forma que la probabilidad de que salga la cara k es proporcional a k. Sea X el resultado obtenido. Hallar las probabilidades de que:

    (a) $P(X$ sea par$)$

    (b) $P(X < 6)$

18. Sea X una v.a. continua con función de distribución F. Sea $Y = F(X)$. Mostrar que $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$

19. Supongamos que la cantidad, expresada en gramos, de cierta sustancia presente en un compuesto, es una variable aleatoria X cuya función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    (a) Obtener la función de distribución de X.

    (b) Hallar b tal que $P(X < b) = \frac{7}{20} P(X > b)$.

    (c) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2} / \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$.

20. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a.; donde X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x)\, I_{(0 \leq x \leq 1)}$$

    (a) Determinar c.

    (b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol: si $x < \frac{1}{3}$, el precio es \$ 1, si $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, el precio es \$ 2 y si $x > \frac{2}{3}$ entonces es de \$ 3. Hallar la distribución del precio de venta del producto.

21. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:

$$f_D(x) = k\, x\, I_{(0,10)}^{(x)}$$

(a) Hallar el valor de la constante k.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

(c) Idem b. sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.

(d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm:

(e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea ≥ 0.99?

22. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$

(a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.

(b) Sea X v.a. continua. Probar que son equivalentes:

1. X tiene distribución simétrica respecto de θ.
2. $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$
3. $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$
4. $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$
5. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$

23. Un comerciante vende ejes en cajas de 250 unidades, 50 de los cuales tienen longitud L_1y el resto longitud L_2. Si L_1y L_2son variables aleatorias con funciones de densidad:

$$f_{L_1}(x) = C_1 e^{-|x-50|}$$

$$f_{L_2}(x) = C_2 e^{-|x-52|}$$

(a) Hallar C_1y C_2para que f_{L_1}y f_{L_2}sean funciones de densidad.

(b) Hallar F_{L_1}.

(c) Hallar la función de distribución de Z si Z = longitud de un eje elegido al azar de la caja mencionada.

24. Se tienen 2 fábricas I y II que producen artículos de tipo I y II respectivamente. La duración de estos artículos sigue una distribución exponencial de parámetro $\frac{1}{4}$y $\frac{1}{5}$respectivamente. Se supone que ambas fábricas tienen en su poder un amplio stock. Si se eligen 5 artículos de la fábrica I y 3 de la fábrica II, calcular las siguientes probabilidades:

(a) entre los 8 elegidos haya 4 artículos que duran más de 3 días.

(b) dado que 4 artículos duran más de 3 días, ¿cuál es la probabilidad de que 2 sean de la fábrica I y 2 de la fábrica II?

25. Consideremos las siguientes funciones:

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & si \quad 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & si \quad 1 < x < 2 \\ 2 & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{5}{3} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -3 \\ -x - 3 & si \quad -3 \leq x \leq -2 \\ -1 & si \quad -2 \leq x \leq -1 \\ x & si \quad |x| \leq 1 \\ 6 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ -x + 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcular

1. $h_2^{-1}([-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}])$
2. $h_2^{-1}((3,4))$
3. $h_2^{-1}(\{6\})$
4. $h_2^{-1}([0,7])$
5. $h_1^{-1}((\frac{3}{4}, \frac{5}{4}))$
6. $h_1^{-1}([\frac{3}{4}, \frac{5}{4}))$
7. $h_1^{-1}([1,2))$

(b) Sea $X_1 \sim \varepsilon(2)$, hallar la distribución de $Y_1 = h_1(X_1)$. Sea $X_2 \sim \mathcal{U}[-2, \frac{3}{2}]$, hallar la distribución de $Y_2 = h_2(X_2)$.

26. (a) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(2.5, 0.16)$. Calcular:

1. $P(1.8 \leq X \leq 3.5)$
2. $P(1.2 < X < 2.5)$
3. $P(X > 3.2)$
4. $P(X^2 \leq 4)$

(b) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Hallar el valor de σ para el cual $P(\alpha < X < \beta)$ sea máxima $0 < \alpha < \beta$.
Hint: Para verificar que el punto hallado es efectivamente un máximo, calcular

$$\lim_{\sigma \to 0} P(\alpha < X < \beta)$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} P(\alpha < X < \beta)$$

27. Se supone que en una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) se distribuye normalmente entre los individuos. Hay un 58 % con $I \leq 75$, un 38 % con $75 \leq I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$. Hallar la función de densidad del índice y la $P(78 \leq I \leq 82)$.

28. Se dice que una v.a. X tiene distribución Gamma ($X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$) con $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ si su densidad es:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}^{(x)}$$

Sea $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$. Probar que:

$$F_Z(z) = P(X \geq n)$$

donde $X \sim \mathcal{P}(z\lambda)$, $n \in \mathbf{N}$.

29. Sea Z una v.a. con distribución normal standard. Probar que Z^2 tiene distribución $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

30. Se dice que una v.a. X tiene distribución logarítmica normal de parámetros μ y σ^2 ($X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$) si su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\, x\, \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma}\right] I_{(x \geq 0)}$$

Comprobar que si $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ entonces $Y = \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

31. Se dice que una v.a. X tiene distribución Weibull de parámetros ν, α y β ($X \sim \mathcal{W}(\nu, \alpha, \beta)$) con $\alpha > 0$ si su densidad es:

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta\right] I_{(x>\nu)}$$

(a) Ver que si $X \sim \mathcal{W}(\nu, \alpha, \beta)$ entonces $Y = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta \sim \varepsilon(1)$

(b) Sean $a, b > 0$, sea $X \sim \mathcal{W}(\nu, \alpha, \beta)$ y sea $G(a, b) = P(X \geq a + \ b/X \geq a)$. Probar que:

1. si $\beta > 1$, entonces $G(a, b)$ es una función decreciente de a ("Propiedad de desgaste")
2. si $\beta < 1$, entonces $G(a, b)$ es una función creciente de a

32. Se dice que una v.a. X tiene distribución logística de parámetros μ, τ ($X \sim \mathcal{L}(\mu, \tau)$) con $\tau > 0$ si su densidad es

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-\mu}{\tau}\right)}{\tau\left[1 + \exp\left(\frac{x-\mu}{\tau}\right)\right]^2}$$

y se dice que una v.a. Y tiene distribución loglogística de parámetros κ, λ ($Y \sim \mathcal{LL}(\kappa, \lambda)$) con $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ si su densidad es

$$f_Y(y) = \frac{\kappa y^{\kappa-1} \lambda^\kappa}{\left[1 + (y\lambda)^\kappa\right]^2} I_{(y \geq 0)}$$

(a) Probar que si $Y \sim \mathcal{LL}(\kappa, \lambda)$ entonces $X = \kappa \ln(\lambda Y)$ tiene distribución logística

(b) Sean $a, b > 0$, sea $X \sim \mathcal{LL}(\kappa, \lambda)$. Determinar para qué valores de los parámetros $P(X \geq a + b/X \geq a)$ es una función decreciente de a

33. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias:

(a) $cX + d$

(b) $X^{\alpha} \qquad (\alpha \in \Re)$

(c) $\ln X$

(d) $\dfrac{X}{X+1}$

(e) $-\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \qquad (\lambda > 0)$