Probabilidades y Estadística (M)

Práctica 1 (2° cuatrimestre 2003)

Espacios de Probabilidad

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos:

   (a) Se arroja un dado equilibrado dos veces.

   (b) Se arroja un dado equilibrado hasta que aparece el primer as.

   (c) De una caja que contiene 5 bolillas numeradas del 1 al 5, se extraen dos bolillas de dos maneras distintas: (i) con reposición y (ii) sin reposición.

   (d) Se elige al azar un punto en el círculo unitario.

2. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean los eventos:

   $A = \{$La suma de los puntos es par$\}$

   $B = \{$La suma de los puntos es exactamente 8$\}$

   $C = \{$Ambos resultados son distintos$\}$

   Explicitar el espacio muestral y calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - C$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos en $\mathcal{A}$. Mostrar que $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i^c)$

4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A_1, A_2, ..., A_n...$ una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$.

   (a) Si $P(A_i) = 0, \forall i$ entonces $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = 0$.

   (b) Si $P(A_i) = 1, \forall i$ entonces $P(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = 1$.

5. Demostrar que si $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ y $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ son dos sucesiones de eventos tales que $P(A_n) \to 1$ y $P(B_n) \to p$, entonces $P(A_n \cap B_n) \to p$.

6. Sea Ω un conjunto no vacío.

   (a) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos σ–álgebras de subconjuntos de Ω entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ también es una $\sigma-$álgebra.

   (b) Generalizar (a) de la siguiente manera: sean $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, una familia de σ-álgebras, donde I es un conjunto no vacío. Entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ también es una σ-álgebra.

   (c) Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de Ω. Mostrar que existe por lo menos una σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{C}$.

   (d) Utilizando todos los puntos anteriores mostrar que existe una menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Es decir una familia de subconjuntos de Ω que llamaremos $\mathcal{A}$ tal que (i) $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, (ii) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, (iii) Si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. La familia $\mathcal{A}$ se llama σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ y se representa por $\sigma(\mathcal{C})$.

(e) Sean $A_1, ..., A_n$ $n \geq 1$ subconjuntos disjuntos del espacio muestral $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Obtener $\sigma(\mathcal{C})$ donde $\mathcal{C} = (A_i)_{i=1}^n$

7. Sean $A_1, ..., A_n$ eventos en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Probar por inducción en n la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{k=1}^n \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=i_1+1}^n \sum_{i_3=i_2+1}^n \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^n (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \end{aligned}$$

8. En un ropero hay n pares de zapatos. Si se eligen al azar $2r$ zapatos (con $2r < n$) ¿Cuál es la probabilidad de que

   (a) no haya ningún par completo?

   (b) haya exactamente un par completo?

   (c) haya exactamente dos pares completos?

9. Se estaciona un auto en un hilera de n coches, sin que quede en ninguno de los extremos. A su regreso, el propietario encuentra que exactamente r de los n lugares están todavía ocupados. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lugares contiguos al auto estén ocupados?

10. Al colocar 6 productos distintos en sus envases, un operario se ha equivocado en 3 de ellos. Si un supervisor revisa los envases, ¿cuál es la probabilidad de que

    (a) los 3 primeros envases revisados contengan los productos equivocados?

    (b) necesite revisar i envases para encontrar los 3 que tienen los productos equivocados? $(i = 4, 5, 6)$

11. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar; sea la número k. Se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que k; sea la número j. Por último se hace una extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que j.

    (a) Describir el espacio muestral para este experimento y determinar el número de sus elementos.

    (b) ¿Es razonable pedir equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al $(1, 1, 1)$?

12. Un bolillero contiene N bolillas numeradas 1, 2,..., N. Se sacan una a una n bolillas $1 \leq n \leq N$, sin devolver al bolillero cada bolilla obtenida. Sean m y k enteros tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

    (a) se extraiga la bolilla m en la k-ésima extracción.

    (b) se extraiga la bolilla m.

(c) el máximo número obtenido sea $\leq m$.

(d) el máximo número obtenido sea m.

(e) dados a y b, $a < b \in \mathbf{N}$; si M es el máximo número obtenido, $a \leq M \leq b$.

(f) los números de las bolillas extraídas en el orden en que fueron extraídas constituyan una sucesión estrictamente monótona.

13. Resolver el ejercicio 12 en el caso en que cada bolilla obtenida sea devuelta al bolillero.

14. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B + N$.

    (a) Hallar la probabilidad de que la k-ésima bolilla extraída, $1 \leq k \leq n$, sea

        i. blanca.

        ii. la primer blanca obtenida.

    (b) Para $k = n$ sea p_n la probabilidad obtenida en (a) ii). Probar que si B y N tienden a infinito de modo que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_n \rightarrow p(1-p)^{n-1}$$

15. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B+N$. Hallar la probabilidad p_k de obtener k bolillas blancas. Probar que si B y N tienden a infinito de modo que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_k \rightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

16. n parejas casadas se han reunido a bailar. Cada caballero tiene la misma probabilidad de bailar con cualquier dama. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún caballero baile con su propia mujer? Calcular el límite de esta probabilidad cuando $n \rightarrow \infty$.

17. (a) Si se colocan 4 bolillas en 4 cajas de acuerdo con la estadística de Bose-Einstein, ¿cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga

        i. exactamente una bolilla?

        ii. exactamente dos bolillas?

        iii. al menos una?

    (b) Resolver el problema anterior para la estadística de Maxwell-Boltzman.

18. Se colocan 6 bolillas en 4 celdas. ¿Cuál es la probabilidad de que

    (a) cada celda esté ocupada?

    (b) al menos 3 celdas estén ocupadas?
    Resolver ambos items para la estadística de Bose-Einstein y de Maxwell-Boltzman.

19. Se reparten N bolillas distinguibles en n urnas de tal modo que cada bolilla tiene la misma probabilidad de llegar a una urna cualquiera sea ésta. Sea A_i el suceso: "la i-ésima urna no está vacía".

(a) Mostrar que

$$V_k = P(A_{i1} \cap \ldots \cap A_{ik}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^N \qquad k \leq n$$

(b) Si $\frac{N}{n} = \lambda$ constante entonces $\lim\limits_{n,N \to \infty} V_k = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^k$

(c) Sea $I_n = 1, 2, \ldots, n \qquad n > 1$. Hallar el número de biyecciones de I_n en I_n con al menos un punto fijo.

20. Consideremos el caso que hemos tomado una muestra aleatoria con reposición de tamaño r de una población de n elementos $a_1, \ldots, a_n$ (supongamos equiprobabilidad en dicho espacio). Sea A el evento "en la muestra obtenida $a_{j_i}, \ldots, a_{j_r}$ no hay elementos repetidos".

   (a) Hallar $P(A)$

   (b) Los cumpleaños de r personas forman una muestra de tamaño r de la población de todos los días del año. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y sabemos que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos considerar que una elección al azar de personas sea equivalente a usar una selección al azar de las fechas de nacimientos y considerar que el año es de 365 días.
   Hallar la probabilidad de que entre r personas elegidas al azar todas tengan distintas fechas de cumpleaños.
   El resultado numérico es sorprendente. Por ejemplo para $r = 23$ tenemos que $p < \frac{1}{2}$, o sea que entre 23 personas, la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día es $> \frac{1}{2}$ (Para $r = 30$, $p = 0.294$).

   (c) Hallar la probabilidad de que si n bolillas distintas se distribuyen al azar en n cajas, estén todas las cajas ocupadas.
   (Para $n = 7$, p ya es $0.00612\ldots$; para $n = 6$, $p = 0.01543\ldots$)
   (Es muy improbable que en 6 tiradas salgan todos los números).

21. Se tienen N bolillas numeradas $1, 2, \ldots, N$ y N cajas numeradas. Se colocan al azar una bolilla en cada caja. Si coincide el número de la bolilla con el de la caja se dice que se produjo un apareamiento.

   (a) Hallar la probabilidad de que ocurra por lo menos un apareamiento.

   (b) Probar que el límite de dicha probabilidad cuando $N \to \infty$ es $1 - e^{-1}$.

22. Se lanza un dado n veces. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos dé exactamente k.
   Sugerencia : Hallar el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(x + x^2 + \ldots + x^6)^n$.