Probabilidades y Estadística (M)

Práctica 3 (2° cuatrimestre 2003)

Variables Aleatorias

1. Sea X una v.a. con función de distribución

   (a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < -3 \\ \frac{1}{4} & \text{si} & -3 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} & x \geq 2 \end{cases}$$

   En este caso sea $A = [-3, 1]$, $B = (-2, 2)$

   (b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{6} & \text{si} & 2 < x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & \text{si} & 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si} & x > 6 \end{cases}$$

   En este caso sea $A = [1, 5]$, $B = (1/2, 3)$

   (c)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} & x \geq 0 \end{cases}$$

   En este caso, sea A el conjunto de los números reales que difieren de algún natural en no más de $1/4$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k}$ con $B_k = [k, k+1]$, $k \geq 0$.

   Calcular en todos los casos propuestos $P(A)$, $P(B)$, $P(B \mid A)$ y $P(B \mid A^C)$.

2. Sobre el escritorio de una secretaria hay 4 cartas y 4 sobres correspondientes a las cartas. Se introducen en los sobres al azar las cartas; sea:

$$X = \text{número de cartas correctamente introducidas}$$

   Hallar p_X y F_X.

3. En un juego, 2 jugadores muestran 1 ó 2 dedos y simultáneamente adivinan el número de dedos que le muestra su oponente. Si sólo uno de los 2 jugadores adivina correctamente, éste gana una cantidad de pesos equivalente a la suma de los dedos mostrados

por él y por su oponente. Si ambos jugadores adivinan correctamente, o ninguno adivina, ninguno gana dinero.
Considere un jugador específico y sea $X =$ cantidad de dinero que gana en un juego dado. Supongamos que cada jugador actúa independientemente del otro. Encontrar los posibles valores de X y las probabilidades asociadas en los siguientes casos

(a) Si cada jugador hace su elección del número de dedos que muestra y del número que adivina a su oponente de modo tal que las 4 posibilidades son equiprobables.

(b) Si cada jugador decide mostrar el mismo número de dedos que adivina a su oponente, y si ambas opciones son equiprobables.

4. Sea el espacio de probabilidades $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, P)$ donde:

$$P(A) = \int_{A\cap[0,3]} \frac{2}{9}x\ dx$$

(a) Calcular

   i. $P([a,b])$ $\quad a < b \leq 0$
   ii. $P([0,t])$ $\quad t > 0$
   iii. $P([0,t))$ $\quad t > 0.$

(b) Sea $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la variable aleatoria definida por:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ t^2 & \text{si} & 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si} & 1 \leq t < 2 \\ t-1 & \text{si} & t \geq 2 \end{cases}$$

Hallar F_X

(c) Consideremos ahora las variables:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} & t \leq -1 \\ 1 & \text{si} & -1 < t \leq 1 \\ -1 & \text{si} & t > 1 \end{cases}$$

$$Z(t) = \begin{cases} t & \text{si} & t < 1 \\ 1 & \text{si} & 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & \text{si} & t > 2 \end{cases}$$

Calcular F_Y, F_Z y $P(Y < Z)$.

5. En una fábrica la proporción de piezas defectuosas que se fabrican es 0.02. Se toma una muestra con reposición de tamaño n. Hallar:

(a) la probabilidad de 0 defectuosas.

(b) la probabilidad de que haya más buenas que defectuosas.

(c) la probabilidad de al menos 2 defectuosas.

(d) Encontrar el número más probable de piezas defectuosas en la muestra cuando $n = 4$ y $n = 100$.

6. Hallar el número de niños que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de tener al menos un varón sea $\geq \frac{3}{4}$.

7. Se sabe que el 10% de los pacientes que presentan ciertos síntomas tienen una determinada enfermedad. El diagnóstico final de la misma depende de un análisis de sangre. Sin embargo, como los análisis individuales son caros, el hematólogo espera hasta que N pacientes que presentan los síntomas lo visiten. Entonces mezcla la sangre de los N pacientes y le hace el análisis. Si ninguna de las N personas está enferma, el análisis sobre la muestra de la mezcla de sangre es negativo. Sin embargo, si uno de los pacientes está enfermo, entonces el análisis dará positivo, y el hematólogo deberá hacer análisis individuales para determinar cuál de los pacientes tiene la enfermedad.

   (a) Encontrar la probabilidad de que el análisis sobre la sangre mezclada dé negativo.

   (b) Si X = número de análisis que debe hacer el hematólogo sobre los N pacientes, determinar la función de probabilidad puntual de X.

8. En una sucesión de ensayos Bernoulli con probabilidad p de éxito, encontrar la probabilidad de que ocurran por lo menos A éxitos antes de B fracasos.
Sugerencia: la cuestión se decide después de no más de $A + B - 1$ ensayos. Este problema contesta la pregunta acerca de la manera de dividir la apuesta cuando el juego se interrumpe en el momento en que a un jugador le faltan A puntos para ganar y al otro B puntos.

9. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.

   (a) Describir un espacio muestral asociado a este experimento.

   (b) Encontrar las funciones de probabilidad puntual y de distribución asociadas a X.

   (c) Calcular la probabilidad de que haga falta un número par de tiradas.

   (d) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de tiradas hasta el tercer as. Obtener la distribución de Y (distribución binomial negativa).

10. Una rueda de ruleta está dividida en 38 secciones, de las cuales 18 son rojas, otras 18 negras y las 2 restantes son verdes. Sea X el número necesario de juegos para obtener una sección verde en jugadas independientes.

   (a) Encontrar la probabilidad de que al menos 4 jugadas sean necesarias.

   (b) Encontrar la probabilidad de que sean necesarias un número impar de jugadas

11. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p, $(0 < p < 1)$.

    (a) Verificar que si s y t son números naturales, entonces

    $$P(X \geq s + t \mid X > t) = P(X \geq s).$$

    (Propiedad de "falta de memoria o desgaste").

    (b) Probar que la única distribución discreta con esta propiedad es la geométrica, de parámetro $p = P(X = 1)$.

12. En una fábrica de generadores se conoce que la producción diaria es de 20 unidades, de las cuales el 20% es defectuosa. Si se vende una partida de 15, encontrar la probabilidad:

    (a) de que no haya defectuosos en la muestra.

    (b) de a lo sumo un defectuoso.

13. Un comprador de componentes eléctricas los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar inspecciona 3 componentes elegidas al azar del lote, y lo aceptará si todas las componentes elegidas no tienen fallas. Si el 30% de los lotes tiene 4 componentes defectuosas y el 70% sólo una, encontrar la proporción de lotes que rechazará el comprador.

14. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en el cual hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma una muestra de 8 de los cuales, al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable. Encontrar la probabilidad de que compre si en realidad hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables.

15. En un concurso de pesca cada pescador paga \$100 por participar. Las cantidades de peces que cada uno de los pescadores puede obtener durante el desarrollo del concurso es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4.5$. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de \$50 por cada pieza. Calcular la función de probabilidad de la ganancia neta.

16. Un minorista ha verificado que la demanda de cajones es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ cajones por semana. El minorista completa su stock los lunes por la mañana a fin de tener 4 cajones al principio de la semana. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?

    (c) ¿Con cuántos cajones deberá iniciar la semana a fin de que la probabilidad de cumplir con los pedidos sea del 99%?

    (d) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?

    (e) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos por semana?

17. Se tienen 3 fuentes radiactivas F_1, F_2 y F_3. El número de partículas que emite cada fuente es una variable de Poisson con λ_i partículas por hora, siendo $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Un investigador elige una fuente al azar y mide 4 partículas en una hora. Encontrar la probabilidad de haber elegido la fuente F_2.

18. Sea X una v.a. continua con función de distribución F. Sea $Y = F(X)$. Mostrar que $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$.

19. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a., donde X tiene función de densidad

$$f_X(x) = c(1-x)\, I_{[0,1]}\,(x)\,.$$

   (a) Determinar c.

   (b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol: si $x < \frac{1}{3}$, el precio es \$ 1, si $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, el precio es \$ 2 y si $x > \frac{2}{3}$ entonces es de \$ 3. Hallar la distribución del precio de venta del producto.

20. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:

$$f_D(x) = k\, x\, I_{(0,10)}\,(x)$$

   (a) Hallar el valor de la constante k.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

   (c) Idem 20.b) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.

   (d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm.

   (e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea ≥ 0.99?

21. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$

   (a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.

   (b) Sea X v.a. continua. Probar que son equivalentes:

      i. X tiene distribución simétrica respecto de θ.

      ii. $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$

      iii. $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$

      iv. $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$

      v. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$

22. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(2.5, 0.16)$. Calcular:

(a) $P(1.8 \leq X \leq 3.5)$

(b) $P(1.2 < X < 2.5)$

(c) $P(X > 3.2)$

(d) $P(X^2 \leq 4)$

23. Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Hallar el valor de σ para el cual $P(\alpha < X < \beta)$ sea máxima $(0 < \alpha < \beta)$.
Sugerencia: Para verificar que el punto hallado es efectivamente un máximo, calcular

$$\lim_{\sigma \to 0} P(\alpha < X < \beta)$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} P(\alpha < X < \beta)$$

24. Se supone que en una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) se distribuye normalmente entre los individuos. Hay un 58 % con $I \leq 75$, un 38 % con $75 \leq I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$. Hallar la función de densidad del índice y la $P(78 \leq I \leq 82)$.

25. Sea $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$. Probar que:

$$F_Z(z) = P(X \geq n)$$

donde $X \sim \mathcal{P}(z\lambda)$, $n \in \mathbf{N}$.

26. Consideremos las siguientes funciones:

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{5}{3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x-3 & \text{si} \quad -3 \leq x \leq -2 \\ -1 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq -1 \\ x & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 6 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ -x+3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcular

i. $h_2^{-1}([-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}])$

ii. $h_2^{-1}((3, 4))$

iii. $h_2^{-1}(\{6\})$

iv. $h_2^{-1}([0,7])$

v. $h_1^{-1}((\frac{3}{4},\frac{5}{4}))$

vi. $h_1^{-1}([\frac{3}{4},\frac{5}{4}))$

vii. $h_1^{-1}([1,2))$

(b) Sea $X_1 \sim \varepsilon(2)$, hallar la distribución de $Y_1 = h_1(X_1)$. Sea $X_2 \sim \mathcal{U}[-2,\frac{3}{2}]$, hallar la distribución de $Y_2 = h_2(X_2)$.

27. Sea Z una v.a. con distribución normal standard. Probar que Z^2 tiene distribución $\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \chi_1^2$.

28. Se dice que una v.a. X tiene distribución logarítmica normal si su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\, x\, \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma}\right] I_{(x\geq 0)}$$

Comprobar que si X es logarítmica normal de parámetros μ y σ^2 entonces $Y = \ln X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

29. Se dice que una v.a. X tiene distribución Weibull de parámetros α y β ($\mathrm{W}(\alpha,\beta)$) si su densidad es:

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] I_{(x>\nu)} \quad \alpha > 0$$

(a) Ver que si X es una v.a. con esta densidad entonces $Y = (x/\alpha)^{\beta} \sim \varepsilon(1)$.

(b) Sea para $a > 0$ y $b > 0$, $G(a,b) = P(X > a + b \mid X \geq a)$. Mostrar entonces que si X es $\mathrm{W}(\alpha,\beta)$, con $\beta > 1$, entonces $G(a,b)$ es una función decreciente de a.

30. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0,1]$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias:

(a) $cX + d$

(b) $X^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

(c) $\ln X$

(d) $\dfrac{X}{X+1}$

(e) $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \qquad (\lambda > 0)$

31. Sea U una variable con distribución $\mathcal{U}(0{,}1)$. Encontrar una función g tal que $g(U)$ tenga distribución

(a) $\mathcal{E}(1)$.

(b) Doble exponencial. Es decir con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

(c) De Cauchy, es decir con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(d) Bi$(1/3, 5)$.

(e) Una distribución discreta con valores $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ y respectivas probabilidades $p_1, p_2, ..., p_n, ...$