

Probabilidades y Estadística (M)
Práctica 7 (2° cuatrimestre 2003)
 Convergencia en probabilidad y casi segura

1. Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v. a. independientes $X_n \sim \varepsilon(1)$. Sea $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$.
 - (a) Probar que $Y_n \xrightarrow{p} 0$.
 - (b) Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\cup_{m=n}^{\infty} |Y_m| \geq \epsilon) = 1$. Deducir que $P(Y_n \rightarrow 0) = 0$.
 - (c) Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v. a. independientes tal que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.
 Entonces $X_n \xrightarrow{p} 0$, pero $P(X_n \rightarrow 0) = 0$.
2. Sean X_1, \dots, X_n v.a. independientes tales que $X_1 = 0$ y para $j \geq 2$

$$P(X_j = k) = \begin{cases} \frac{1}{j^3} & \text{si } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j \\ 1 - \frac{2}{j^2} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Probar que

$$\sum_{j=1}^n \frac{X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{si } \alpha > \frac{1}{2}$$

Sugerencia: $\sum_{k=1}^j k^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$.

3. Sean X_1, \dots, X_n v.a. independientes tales que $X_n \sim \mathcal{U}[0, a_n]$, $a_n > 0$. Probar que:
 - (a) Si $a_n = n^2$ entonces con probabilidad 1 sólo un número finito de las X_n toma valores < 1 .
 - (b) Si $a_n = n$ entonces con probabilidad 1 un número infinito de las X_n toma valores < 1 .
4. Se tira una moneda equilibrada infinitas veces en forma independiente. Consideremos una racha fija (s_1, \dots, s_k) donde $s_i = c, s$; $1 \leq i \leq k$.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la racha aparezca entre el tiro n y el $n + k$?
 - (b) Mostrar que la probabilidad de que la racha aparezca infinitas veces es 1.
5. Se elige al azar un número en el intervalo $[0, 1]$.
 - (a) Encontrar la probabilidad de que la primera cifra decimal sea 2.
 - (b) Encontrar la probabilidad de que la n -ésima cifra decimal sea 5 y la $(n + 1)$ -ésima sea 7.
 - (c) Sea B el suceso: “el número 57 aparece infinitas veces en el desarrollo decimal”.
 Probar que $P(B) = 1$.

(d) Sea A_n el suceso: “el 9 aparece n veces consecutivas en los $2n$ primeros lugares”.

Calcular $P(A^\infty)$. con $A^\infty = \{A_n \text{ infinitas veces}\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que sea racional?

Observación: Si un número admite dos desarrollos decimales se optará por el finito. Por ejemplo, se toma 0.745 y no 0.7449.

6. Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ sucesiones de v. a. Probar que:

(a) Si $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$, $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$.

Más generalmente $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(X, Y)$ para toda g uniformemente continua en ambas variables.

Si $X = a$ e $Y = b$ constantes entonces basta con que g sea continua en el punto (a, b) .

(b) Si $X_n \xrightarrow{cs} X$ e $Y_n \xrightarrow{cs} Y$ entonces $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{cs} g(X, Y)$ para toda g continua.

(c) Si $X_n \xrightarrow{p} 0$ e Y_n está acotada en probabilidad entonces $X_n Y_n \xrightarrow{p} 0$. Recordemos que una sucesión de v.a. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice acotada (uniformemente) en probabilidad si dado $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $P(|Y_n| \geq K) < \varepsilon$.

Igual resultado vale cambiando convergencia en probabilidad por convergencia cs.

(d) Si $|X_n| \leq c \quad \forall n$, entonces la condición necesaria y suficiente para que $X_n \xrightarrow{p} 0$ es que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|) = 0$.

(e) Usando 6.d probar que si $X_n \xrightarrow{p} c$, donde c es una constante y si f es una función acotada y continua en c , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n)] = f(c)$.

7. Sean f y g funciones continuas en $[0, 1]$ tales que $0 \leq f(x) \leq cg(x)$ donde c es una constante positiva y $\int_0^1 g(x) dx > 0$.

(a) Sean X_1, \dots, X_n las coordenadas de un punto P elegido al azar en el cubo $[0, 1]^n$ (distribución uniforme).

Sean $Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{n}$, $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i)}{n}$

Verificar que:

$$Y_n \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x) dx$$

$$Z_n \xrightarrow{p} \int_0^1 g(x) dx$$

(b) Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + \dots + g(x_n)} dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 g(x) dx}$$

Sugerencia: Usar el ejercicio 6.d.

8. Veamos un ejemplo de variables aleatorias que convergen casi seguramente sin convergencia en ningún momento.

Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. tales que:

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}.$$

Mostrar que $X_n \xrightarrow{cs} 0$ pero $E(X_n^p) \not\rightarrow 0 \forall p \in \mathbb{N}$.

9. Sean X_1, \dots, X_n v.a. tales que $E(X_n) = 0$, $\text{var}(X_n) = \frac{k}{n}$, $k > 0$. Probar que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(\varepsilon) = 1$.

10. Desigualdad de Chebyshev de un lado

- (a) Si X es una v.a. tal que $E(X) = 0$ y $\text{var}(X) = \sigma^2 < \infty$ entonces $\forall a > 0$

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

- (b) Un conjunto de 200 personas (integrado por 100 mujeres y 100 hombres) se divide aleatoriamente en 100 pares de 2 personas cada uno. Hallar la cota superior para la probabilidad de que menos de 30 de esos pares estén formados por una mujer y un hombre.
11. Un minorista recibe galletitas sin sal de 3 fábricas distintas siendo las cantidades recibidas medidas en kg. v.a. independientes X, Y, Z con distribuciones: $X \sim \mathcal{N}(100, 20)$, $Y = 97 + W$ con $W \sim \varepsilon(\frac{1}{3})$ y $Z \sim \mathcal{U}[80, 90]$. Acotar inferiormente la probabilidad de que el total recibido se encuentre entre 275 y 295.
12. Una máquina produce rieles cuya longitud es una v.a. con distribución $\mathcal{U}[0.8, 1.2]$. Se eligen al azar n rieles en forma independiente y se forma el promedio \bar{X} de sus longitudes. Hallar n para que:

$$P(0.99 < \bar{X} < 1.01) > 0.90.$$

13. Una máquina produce artículos de 3 clases: A, B y C en proporciones 25%, 25% y 50% respectivamente. Las longitudes de los artículos A y B siguen distribuciones $\mathcal{U}[0, 1]$ y $\mathcal{U}[0, 2]$ respectivamente y las longitudes de los artículos C se distribuyen según la densidad $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) I_{[0,2]}(x)$. Se eligen n artículos al azar de la producción total y se calcula el promedio de sus longitudes.

- (a) Dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 140$.
- (b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90?.

14. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización del consumo de marihuana (p es desconocida). Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima p a partir de la frecuencia relativa f_r que se define por

$$f_r = \frac{\text{N}^\circ \text{de personas encuestadas que están a favor de la legalizaci3n}}{50}$$

Observar que f_r es una variable aleatoria, y p es un número. Cuánto más cerca esté f_r de p , mejor estimador será. Hallar una cota superior para $P(|f_r - p| > 0.1)$ que no dependa de p .

15. Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. independientes con $P(X_n = n^\theta) = P(X_n = -n^\theta) = \frac{1}{2}$ y $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$. Probar que si $0 < \theta < \frac{1}{2}$ entonces $\bar{X}_n \xrightarrow{p} 0$.

16. Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d., $X_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Hallar el límite cs. de Y_n donde $Y_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}$.

17. Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d., $E(X_1) = \text{var}(X_1) = 1$. Entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\left(n \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2}} \xrightarrow{cs} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

18. Sean $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d., $E(|X_1|^2) < \infty$. Hallar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_1 | X_1 + \dots + X_n)$$

Sugerencia: Probar que $E(X_1 | X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.