Probabilidades y Estadística (M)
2° cuatrimestre 2004

Hay dos planteos para el primer ítem del ejercicio del coleccionista de cupones (ejercicio 13, práctica 5). El correcto:

Planteo 1
Sea la variable aleatoria

$$\begin{aligned} X &= \text{número de figuritas distintas que hay en un grupo de } k \text{ de ellas} \\ X &= \sum_{i=1}^{N} X_i, \text{ donde} \\ X_i &= \begin{cases} 1 & \text{si la figurita iésima está representada entre las k} \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \end{aligned}$$

Este problema se resuelve pensando que el espacio muestral Ω_1 donde estamos trabajando está dado por

$$\Omega_1 = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i = \text{figurita obtenida en el i-ésimo lugar, } 1 \le a_i \le N\}.$$

Este espacio resulta equiprobable y $\sharp\Omega_1 = N^k$. (Equivale a contar todas las maneras distintas de ubicar k bolillas **numeradas (distinguibles)** en N cajas distintas). Luego,

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = 1 - \frac{(N-1)^k}{N^k}$$

y

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = N\left[1 - \frac{(N-1)^k}{N^k}\right].$$

El planteo incorrecto

Planteo 2
Llamemos

$$X = \text{número de figuritas distintas que hay en un grupo de } k \text{ de ellas}$$

Podemos asociarlo al ejercicio anterior: cada figurita es distinguible de las otras, pensamos a cada figurita como una urna, hay N de ellas distintas disponibles. Ubicamos k bolitas en N urnas, representando los posibles valores de las k figuritas. En este caso,

$$\Omega_2 = \left\{(b_1, \dots, b_N) : b_i = \text{cantidad de figuritas i obtenidas entre las k elegidas, } 1 \le b_i \le k,\ \sum_{i=1}^{N} b_i = k\right\}.$$

Entonces, el espacio éste también es equiprobable y

$$\begin{aligned} \sharp\Omega_2 &= \sharp\{\text{maneras distintas de acomodar } k \text{ bolas } \textbf{indistinguibles} \text{ en } N \text{ urnas }\} \\ &= \binom{N+k-1}{k} \end{aligned}$$

(según la estadística de Bose-Einstein). En el ejercicio anterior trabajamos con

$$\begin{aligned} Y &= N - X = \text{cantidad de urnas vacías luego de repartir } k \text{ bolas en } N \text{ urnas} \\ &= \text{cantidad de figuritas no representadas entre las } k \text{ elegidas} \end{aligned}$$

escribiendo

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{N} Y_i, \text{ donde} \\ Y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si la urna iésima está vacía, es decir la figu i no representada} \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= P(Y_i = 1) \\ &= \frac{\sharp\{\text{maneras distintas de acomodar } k \text{ bolas } \textbf{indistinguibles} \text{ en } N-1 \text{ urnas }\}}{\sharp\{\text{maneras distintas de acomodar } k \text{ bolas } \textbf{indistinguibles} \text{ en } N \text{ urnas }\}} \\ &= \frac{N-1}{k+N-1} \end{aligned}$$

y de ahí,

$$E(X) = \frac{kN}{k+N-1}.$$

Para dilucidar cuál es el planteo correcto, lo que hay que ver es cuál de los dos espacios muestrales modela mejor la situación de coleccionar figuritas de un álbum. Para los dos Ω_i la probabilidad de elegir una figurita del álbum en una extracción es $\frac{1}{N}$. Sin embargo, por ejemplo, para dos extracciones, los eventos

$$\begin{aligned} A &= \text{“obtuve las figuritas 1 y 2 en las dos extracciones”} \\ B &= \text{“obtuve dos veces la figurita 1 en las dos extracciones”} \end{aligned}$$

tienen las siguientes probabilidades:

Para Ω_1 :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{(1,2);(2,1)\}) = \frac{2}{\sharp\Omega_1} \\ P(B) &= P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{\sharp\Omega_1} = \frac{1}{2}P(A). \end{aligned} \tag{1}$$

Para Ω_2 :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{(1,1,0,\dots,0)\}) = \frac{1}{\sharp\Omega_2} \\ P(B) &= P(\{(2,0,0,\dots,0)\}) = \frac{1}{\sharp\Omega_2} = P(A). \end{aligned}$$

Y como los eventos A y B deberían satisfacer la relación de probabilidades dada en (1), resulta que el primer planteo es correcto. Me parece que la diferencia es bastante sutil, ¿no?