1. Sean $x > 0$ e y dos enteros. Un paseo al azar $(s_0, s_1, \ldots, s_x)$ del origen al punto (x, y) es una poligonal cuyos vértices tienen abscisas $0, 1, 2, \ldots, x$ y ordenadas $s_0, s_1, \ldots, s_x$ tales que:

$$s_x = y \qquad s_0 = 0 \qquad s_i - s_{i-1} = \varepsilon_i = \pm 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, x$$

O sea, en cada paso puede subir o bajar 1. Si hay p ε_i positivos y q negativos entonces:

$$\begin{cases} x = p + q \\ y = p - q \end{cases} \tag{1}$$

(a) Un punto arbitrario (x, y) puede ser unido al origen por un paseo si y sólo si x e y son de la forma (1).

(b) Sea $N_{x,y}$ el número de paseos distintos del origen al punto (x, y). Hallar $N_{x,y}$.

(c) Calcular el número de paseos posibles del origen a puntos (n, y) con y arbitrario.

(d) Principio de reflexión
Sea $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$ pares de números enteros $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Un paseo de A a B se define como antes considerando a A como origen. Sea A' el simétrico de A respecto del eje x. Probar que el número de paseos que van de A a B que tocan o cruzan al eje x es igual al número de paseos de A' a B.

(e) Sean $x > 0$, $y > 0$. Probar que el número de paseos del origen a (x, y) $(s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_x = y)$ tales que $s_1 > 0 \quad s_2 > 0 \quad \ldots \quad s_x > 0$ es $\dfrac{y}{x} N_{x,y}$.

(f) Problema del escrutinio
Supongamos que en una elección, el candidato P obtiene p votos y el candidato Q, q votos, con $p > q$. Probar que la probabilidad de que a través de todo el escrutinio haya siempre más votos para P que para Q es $\dfrac{p-q}{p+q}$.

(g) Cien personas hacen cola en la boletería de un teatro. La entrada cuesta \$5. Sesenta personas no tienen más que billetes de \$5 y las otras cuarenta no tienen más que billetes de \$10. No hay dinero en la caja al abrir la boletería. ¿Cuál es la probabilidad de que la venta de entradas se desarrolle sin pararse, es decir sin que se presente ninguna persona que tenga billetes de \$10 para adquirir la entrada cuando no hay billetes de \$5 en caja?

2. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente.

Urna A: 5 bolitas rojas y 3 blancas
Urna B: 1 bolita roja y 2 blancas

Se arroja un dado equilibrado. Si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolita de la urna A que se coloca en la urna B y luego se extrae una bolita de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

(a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

(b) Si ambas bolitas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que sean blancas?

3. (a) Supongamos que una prueba de laboratorio para diagnosticar cierta enfermedad es tal que
$$P(A|E) = P(A^c|E^c) = 0.95$$
siendo E el evento: "la persona examinada contrajo la enfermedad" y A el evento: "el resultado de la prueba indica que la persona examinada contrajo la enfermedad".
Supongamos que la probabilidad de que una persona que se examina padezca la enfermedad es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que según la prueba contrajo el mal en realidad lo padezca?

   (b) Sean ahora
$$P(A|E) = P(A^c|E^c) = p \qquad\qquad P(E) = 0.005$$
¿Para qué valor de p es $P(E|A) = 0.95$? Interpretar la respuesta.

4. Hay 3 cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de B, y la de C es igual a su suma. Eligiendo al azar una caja se sacan de ella con reposición 2 piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que provengan de la caja A.

5. Tres personas A, B, C extraen con reposición y en forma independiente dos bolillas de una urna que contiene 2 bolillas blancas y 5 rojas.
Sean
a = número de bolillas rojas extraídas por A
b = número de bolillas rojas extraídas por B
c = número de bolillas rojas extraídas por C
Consideremos entonces las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$
Calcular la probabilidad de que:

   (a) una matriz tenga algún autovalor igual a 1.

   (b) si la matriz tiene algún autovalor igual a 1, B no haya extraído ninguna bolilla roja.

6. Una bolilla está en una de n cajas. Sea p_i la probabilidad de que esté en la caja i. Una persona le da un vistazo a las cajas. Si la bolilla está en la caja i, la probabilidad de que la vea es α_i. Calcular la probabilidad de que la bolilla esté en la caja j, dado que al mirar en la caja i no la vio.
Sugerencia: Considerar los casos $j = i$, $j \neq i$

7. Consideremos el siguiente experimento llamado "esquema de Polya". De un bolillero que contiene B bolillas blancas, $B \geq 1$ y R rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \geq 1$.

(a) Hallar la probabilidad de que:
   i. se obtenga una roja en la segunda extracción.
   ii. se obtenga una roja en la n-ésima extracción.
   iii. se obtenga una roja en la segunda extracción y una bolilla blanca en la tercera extracción.

(b) Hallar la probabilidad de que:
   i. se obtenga una roja en la tercera extracción dado que en la segunda se obtuvo una roja.
   ii. se haya obtenido una roja en la primera extracción dado que se obtuvo una roja en la n-ésima.

(c) Hallar la probabilidad de que:
   i. se obtenga por lo menos una roja en las dos primeras extracciones sabiendo que exactamente una roja se ha obtenido en las 3 primeras extracciones.
   ii. la primera roja salga en la segunda extracción sabiendo que al menos una roja se obtuvo en las 3 primeras extracciones.

8. (a) Un dado se tira tantas veces como sea necesario para que aparezca un as. Suponiendo que el as no aparece en el primer tiro, ¿cuál es la probabilidad de que sean necesarios más de 3 tiros?
   (b) Supongamos que el número de tiros sea par, ¿cuál es la probabilidad de que sea 2?

9. Para el ejercicio 11 de la práctica 1 calcular la probabilidad de
   (a) sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo 1 en la segunda.
   (b) sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo 1 en la tercera.

10. Se tienen $n+1$ urnas numeradas $0, 1, \ldots, n$. La urna i tiene i bolillas blancas y $n-i$ negras. Se elige al azar una urna.
   (a) Si se extrae de ella una bolilla al azar,
      i. hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.
      ii. Si la bolilla extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna i, $0 \leq i \leq n$?
   (b) Si se realizan k extracciones con reposición de la urna elegida,
      i. hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.
      ii. Sabiendo que las k bolillas extraídas son blancas, si se realiza una nueva extracción, ¿cuál es la probabilidad de que esta última bolilla sea blanca?

11. Sean a, b y c tres jugadores que juegan por turnos a un juego que nunca se empata de acuerdo con la siguiente regla:
    Empiezan a y b. El perdedor es reemplazado por c. El juego continua de esta manera (el ganador juega con el que estaba afuera) hasta que un jugador gane 2 veces consecutivas convirtiéndose en el ganador del juego.

(a) Escribir un espacio muestral.

(b) Supongamos que en cada partido cada uno de los 2 jugadores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar.

i. Calcular $P(a \quad a)$ y $P(a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad b)$.

ii. Sea A_4 el evento el juego termina en el cuarto encuentro. Calcular $P(A_4)$.

iii. Sea $w = (a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad \ldots \quad)$. Calcular $P(w)$.

iv. Mostrar que la probabilidad de que a gane es $5/14$ y calcular la de los otros dos.

12. Una persona tira dos dados equilibrados en orden. Calcular la probabilidad condicional de que la suma de los dos números sea 7 dado que:

(a) la suma es impar.

(b) la suma es mayor que 6.

(c) el número del segundo dado es par.

(d) el número de un dado por lo menos es impar.

(e) los números de los dos dados son iguales.

13. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la n-ésima tirada, sabiendo que salió por lo menos una vez entre las $(m+n)$ primeras tiradas? $m \geq 1$.

14. Un modelo simplificado del pronóstico del tiempo
Supongamos que el tiempo (seco o lluvioso) de mañana tendrá probabilidad p de ser el mismo que el de hoy.

(a) Si el día 1^0 de enero fue lluvioso, mostrar que $p_n =$ probabilidad de que el día (n+1)-ésimo de ese año sea lluvioso satisface

$$\begin{cases} p_n = (2p-1)p_{n-1} + (1-p) & n \geq 1 \\ p_0 = 1 \end{cases}$$

(b) Probar que

$$p_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^n] \quad n \geq 0$$

15. (a) De un bolillero que contiene n bolillas numeradas $1, 2, \ldots, n$ se extrae una al azar. Sea A_p el evento: "el número de la bolilla elegida es divisible por p (p primo)". Probar que si $p_1, p_2, \ldots$ son distintos divisores primos de n entonces los eventos $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ son independientes.

(b) Sea $\varphi(n)$ la función de Euler de la teoría de números, es decir $\varphi(n)$ es el número de enteros coprimos con n y menores o iguales que n. Demostrar que

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primos: } p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

16. Se eligen al azar e independientemente dos puntos en el intervalo $[0,1]$, llamémoslos A (al menor) y B (al mayor). Hallar la probabilidad de que los segmentos determinados, es decir, los segmentos $[0,A]$, $[A,B]$ y $[B,1]$ sean los lados de un triángulo.

17. (a) Probar que el evento A es independiente de cualquier evento B si y sólo si $P(A) =$ 1 ó 0.

    (b) Si $A \subset B$ y A y B son independientes entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.

    (c) Probar que si:

      i. A es independiente de $B \cap C$ y $B \cup C$
      ii. B es independiente de $A \cap C$
      iii. C es independiente de $A \cap B$
      iv. $P(A), P(B), P(C) > 0$

    entonces A, B y C son independientes.

    (d) Probar que si $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$, siendo A_i independientes, $1 \leq i \leq n$ entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i), \quad \forall \quad 1 \leq m \leq n$$

    con lo cual $B_1 \dots B_m$ son independientes, $\forall \quad 1 \leq m \leq n$.

18. Se extrae al azar una bolilla de una urna que tiene 9 bolillas de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas, numeradas 1, 2, 3 en cada color. Además las siguientes bolillas son rayadas: n° 1 blanca, n° 2 negra y n° 3 roja.
Sean los sucesos:
A: "la bolilla es n° 1"
B: "la bolilla es blanca"
C: "la bolilla es rayada"

    (a) ¿Son los sucesos A, B, y C independientes de a pares?

    (b) ¿Son independientes los sucesos A, B y C?

19. Sean $S_1 \dots S_n$ eventos independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Hallar la probabilidad de que de los S_i ocurra:

    (a) al menos uno.

    (b) exactamente uno.

    (c) ninguno.

    (d) exactamente k en el caso $P(S_i) = p \qquad 1 \leq i \leq n$.