1. Sea X una v. a. con distribución $F(x)$. Probar que:

   (a) Si X es acotada, es decir $P(A \leq X \leq B) = 1$, entonces existe $E(X)$ y $A \leq E(X) \leq B$.

   (b) En particular si $P(X \geq 0) = 1$, entonces $E(X) \geq 0$ y

   $$E(X) = 0 \Longleftrightarrow P(X = 0) = 1.$$

2. Sea X una v. a. con distribución $F(x)$.

   (a) Si $E(|X|) < \infty$ entonces vale que:

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} x(1 - F(x)) &= 0 \\ \lim_{x \to -\infty} xF(x) &= 0. \end{aligned}$$

   (b) Si $E(X^2) < \infty$ entonces

   $$\lim_{x \to +\infty} x^2[1 - F(x) + F(-x)] = 0.$$

   Si X es una variable absolutamente continua, entonces

   $$E(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} x[1 - F(x) + F(-x)]\, dx.$$

3. Sea X una v.a. tal que $E(X^2) < \infty$, entonces:

   $$\begin{aligned} E[(X - c)^2] &< \infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \\ \mathrm{var}(X) &\leq E[(X - c)^2] \end{aligned}$$

4. Sea X una v.a. cualquiera. Probar que:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

   Concluir que

   $$E(|X|) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$$

5. Sea X el resultado que se obtiene al arrojar un dado equilibrado una vez. Si antes de arrojar el dado se ofrece la opción de elegir entre recibir $\$\frac{2}{7}$ ó $h(X) = \$\frac{1}{X}$, decidir cuál de las dos opciones es preferible.

6. Si $E(|X|) < \infty$ y X es simétrica respecto de m entonces $E(X) = m$. Recordar la definición de variable aleatoria simétrica dada en el ejercicio 21 de la práctica 3: Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$

7. Se dice que una v. a. X tiene distribución logística si su densidad es

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

   (a) Probar que X tiene distribución simétrica en torno a 0.

   (b) Hallar la densidad de $Y = e^X$ y su esperanza.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. positivas independientes e idénticamentes distribuídas (i.i.d.). Demostrar que:

$$E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

9. Hallar la esperanza y varianza de las siguientes variables aleatorias:

   (a) $\mathcal{B}i(n,p)$. *Sugerencia*: ver ejercicio 6 de la práctica 4, que permite escribir a una $\mathcal{B}i(n,p)$ como suma de n variables aleatorias $\mathcal{B}i(1,p)$ independientes.

   (b) $\mathcal{G}(p)$. *Sugerencia*: una serie de potencias es derivable término a término dentro de su radio de convergencia.

   (c) $\mathcal{BN}(r,p)$. *Sugerencia*: recordar el vínculo de la binomial negativa con la geométrica.

   (d) $\mathcal{P}(\lambda)$. *Sugerencia*: para hallar $Var\,(X)$ calcular primero $E\,(X\,(X-1))$..

   (e) $\Gamma(\alpha,\lambda)$. *Sugerencia*: recordar (y usar) que si $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,(x)\,dx = 1$, cualquiera sean los valores de α y λ positivos.

   (f) $\varepsilon(\lambda)$.

   (g) $\chi^2(n)$.

   (h) $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

   (i) $\mathcal{U}[a,b]$.

   (j) $\beta(a,b)$. *Sugerencia*: recordar (y usar) que si $X \sim \beta(a,b)$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,(x)\,dx = 1$, cualquiera sean los valores de a y b positivos.

10. En un comercio de artículos para el hogar hay en existencia 6 televisores. Sea X el número de clientes que entran a comprar un televisor por semana, siendo $X \sim \mathcal{P}(5)$. Tomando en cuenta que cada cliente que entra a comprar un televisor lo compra si está disponible, ¿cuál es el número esperado de televisores a ser vendidos la próxima semana?

11. Un juego consiste en arrojar un dado equilibrado hasta obtener un número mayor o igual que 4 por primera vez. Sea X el número de veces que se arroja el dado. El puntaje que se obtiene es $(4 - X)$ si $1 \leq X \leq 3$ y no se obtiene puntaje en caso contrario.

    (a) ¿Cuál es el puntaje esperado de este juego?

    (b) Si se juega dos veces este juego, y en total se obtuvieron 2 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que la primera vez no se haya obtenido puntaje?

12. Se distribuyen al azar N bolillas indistinguibles en m urnas. Sean X el número de urnas vacías; Y el número de urnas que contienen exactamente una bolilla y Z el número de urnas que contienen dos o más bolillas.

    (a) Hallar $E(X)$
    Sugerencia: Sea
    $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i-ésima urna está vacía} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
    Verificar que $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$.

    (b) Hallar $E(Y)$.

    (c) Hallar $E(Z)$.

    (d) Un centro cultural dispone de m cuentas de correo electrónico para comunicarse con el público. Durante un día en particular, N personas envían sus inquietudes vía e-mail al centro cultural, eligiendo una cuenta al azar para hacerlo. Hallar la esperanza del número de cuentas de correo que no son usadas durante dicho día.

13. El problema de las colecciones de cupones (o de figuritas)
    Un álbum está compuesto por N figuritas distintas. Al comprar un sobrecito la probabilidad de obtener una figurita dada es la misma para todas las figuritas.

    (a) Hallar la esperanza del número de figuritas diferentes que hay en un conjunto de k figuritas.

    (b) Hallar el número esperado de figuritas que es necesario juntar para completar el álbum.

14. Muestreo estratificado
    Una ciudad tiene n manzanas de las cuales n_j tienen x_j habitantes cada una ($n_1 + n_2 + \cdots = n$). Sea $m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}$ el número medio de habitantes por manzana y sea $a^2 = \frac{1}{n} \sum_j n_j x_j^2 - m^2$. En un muestreo sin reemplazo se seleccionan r manzanas aleatoriamente y en cada una se cuentan los habitantes. Sea $Y =$ cantidad de personas encuestadas. Mostrar que
    $$E(Y) = mr$$
    $$\operatorname{var}(Y) = \frac{a^2 r(n-r)}{n-1}$$

15. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que:

$$P(X_k \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t^k & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n$$

(a) Sea $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Hallar F_Y, f_Y, $E(Y)$.

(b) Hallar $E(X_1 \cdots X_n)$.

16. Sean X_1 y X_2 v.a.i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$. Calcular $E(Y)$ y $E(Z)$ donde $Y = \min(X_1, X_2)$, $Z = \max(X_1, X_2)$. ¿Cuál de las dos debiera ser menor?

17. Sea X una v.a. con distribución $\varepsilon(\lambda)$ tal que $F_X(1.2) = 0.30232$.

(a) Hallar $E(X)$, $\text{var}(X)$.

(b) Sea $Y = 4X + 1$. Hallar $E(Y)$, $\text{var}(Y)$.

18. Sean X e Y como en el ejercicio 4 de la práctica 4. Hallar $E(X)$, $E(Y)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, $E(XY)$, $\text{cov}(X,Y)$, $\text{var}(X-Y)$, $\rho(X,Y)$.

Ej. 4 Práctica 4: Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases}$$

$$Y = k \quad \text{si se extraen } k \text{ bolitas negras}$$

19. Sean X e Y como en el ejercicio 13 de la práctica 4. Hallar $E(X)$, $E(Y)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, $E(XY)$, $\text{cov}(X,Y)$, $\text{var}(X-Y)$, $\rho(X,Y)$.

Ej. 13 Práctica 4: Sea (X,Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(3y + x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

20. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad uniforme en el pentágono de vértices $(-1,1)$, $(1,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$. Calcular $\text{cov}(X,Y)$.

21. Dada una urna con N bolillas de las cuales D son blancas y $N - D$ son negras, se extraen n sin reposición. Sean

$$X = \text{número de bolillas blancas extraídas}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i-ésima bolilla extraída es blanca} \\ 0 & \text{si la i-ésima bolilla extraída es negra} \end{cases}$$

(a) Probar que:

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{D(D-1)}{N(N-1)} \qquad \text{para } i \neq j$$

$$P(X_i = 1) = \frac{D}{N}$$

Determinar la distribución conjunta de (X_i, X_j).

(b) Calcular $E(X_i)$, $\text{var}(X_i)$.

(c) Calcular $\text{cov}(X_i, X_j)$ para $i \neq j$. Interpretar.

(d) Hallar $E(X)$. Ver que

$$\text{var}(X) = \frac{(N-n)nD(N-D)}{(N-1)N^2}$$

Sugerencia: Usar $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Notar que $X \sim \mathcal{H}(N, D, n)$.

22. Sea $(X_1, \ldots, X_k) \sim \mathcal{M}(p_1, \ldots, p_k, n)$, $n > 2$.

    (a) Hallar $E(X_i)$, $\text{var}(X_i)$, $\text{cov}(X_i, X_j)$.

    (b) Hallar el mejor predictor lineal de X_1 basado en $X_2 + X_3$ y el error de predicción.

23. Si dos v.a. X e Y toman sólo dos valores cada una, probar que $\text{cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow X$ e Y son independientes.

24. Mostrar con un ejemplo que $\text{cov}(X, Y) = 0$ no implica que X e Y sean independientes.

25. Sea (X, Y) un vector aleatorio $\mathcal{N}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$, $-1 < \rho < 1$. Probar que $\text{cov}(X, Y) = 0$ es equivalente a que X e Y son independientes.