1. (a) Sean X e Y v. a. independientes. Probar que si:
   i. $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$.
   ii. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{B}i\left(k, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

   (b) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \mid X=k \sim \mathcal{B}i(k,p) \Rightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

2. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1-q=p$ de ser atrapado.
   Sean X = cantidad de peces que pican, e Y = cantidad de peces atrapados.

   (a) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.
   (b) Mostrar que la distribución de $(X-Y)|Y=y$ es $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.
   (c) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados.

3. El número de pasas en un budín inglés sigue la distribución $\mathcal{P}(60)$. Una persona compra un budín, saca todas las pasas una por una y reparte las pasas entre él y un amigo de la siguiente forma: después de extraer cada pasa tira una moneda equilibrada dando una pasa al amigo si sale cara, o comiéndosela él si sale ceca.

   (a) ¿Cuál es la distribución de número de pasas que el amigo recibe y su valor esperado?
   (b) Calcular la probabilidad de que reciban 30 pasas cada uno.
   (c) Calcular la probabilidad de que el budín tenga más de 60 pasas de uva, dado que el amigo recibió 30.

4. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 2, se sacan con reposición 2 bolitas de una urna que contiene 2 bolitas blancas y 3 rojas. Si el resultado del dado no es múltiplo de 2, se sacan 3 bolitas sin reposición de la misma urna. Se define X como el número de bolitas rojas e Y = resultado del dado. Hallar p_X, p_Y, p_{XY}, $p_{X|Y}$, $p_{Y|X}$.

5. De una urna que contiene 3 bolitas rojas y 4 blancas se extraen con reposición 2 bolitas. Si el número de bolitas blancas extraídas es k, se extraen con reposición bolitas hasta obtener $k+2$ bolitas blancas. Calcular la probabilidad de que no haya sido extraída ninguna bolita blanca en la primera parte del experimento, sabiendo que en la segunda parte del experimento se tuvieron que sacar 3 bolitas.

6. Para decidir quién paga la cena, 2 amigos sacan 2 bolitas cada uno de una urna que contiene 3 bolitas blancas y 2 negras. El primero de ellos hace sus extracciones sin reponer. A continuación de la urna resultante el otro saca sus 2 bolitas con reposición. Si sacan igual número de bolitas blancas cada uno paga su cuenta. Encontrar la probabilidad de que alguno pague las 2 cuentas.

7. (a) Sean X e Y v. a. tales que $Y|X = x$ tiene distribución $F(y)$ que no depende de x. Probar que entonces X e Y son independientes y $F_Y(y) = F(y)$.
   (b) Usando 7.a encontrar la distribución de $Z = XY$ cuando $X \sim \chi^2(p)$, $Y \mid X = x \sim \Gamma(n, \lambda x)$.

8. Sea X tal que $E(X^2) < \infty$

   (a) Verificar que:
   $$\text{var}[E(X|Y)] = E[E^2(X|Y)] - E^2(X)$$
   Notar que no estamos trabajando con la varianza condicional de $X|Y$ (que es una variable aleatoria, $Var\,(X|Y) = E\left[[X - E\,(X|Y)]^2\,|Y\right]$) sino con la varianza de la variable $E(X|Y)$, que es un número.
   (b) Verificar que:
   $$E[E^2(X|Y)] = E[XE(X|Y)]$$
   Sugerencia: $E(X|Y) = h(Y)$
   (c) Probar que:
   $$\text{var}(X) = \text{var}[E(X|Y)] + E\{[E(X|Y) - X]^2\}$$
   (d) Deducir que:
   $$\text{cov}[X - E(X|Y), E(X|Y)] = 0$$
   Interpretar geométricamente.

9. Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ v. a. independientes. Consideremos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sea $k < n < l$.

   (a) Usando propiedades de esperanza condicional probar que $P\,(S_l \leq z \mid S_n = x) = P\,(S_l \leq z)$. Es decir que la distribución de S_l no depende del "pasado".
   (b) Suponiendo que las X_i son discretas, probar que $S_k|S_n = x$ y $S_l|S_n = x$ son independientes.
   (c) Usando propiedades de esperanza condicional probar que cualquiera sea la distribución de las X_i resulta que $S_k|S_n = x$ y $S_l|S_n = x$ son independientes.

10. Una persona que llega a la parada del colectivo a las 10 hs. sabiendo que el colectivo llegará en algún momento entre las 10 y las 10:30 con distribución uniforme.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 10 minutos?
    (b) Si el colectivo no llegó a las 10:15, encontrar la probabilidad de que tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más.

11. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 y las 10 hs. 20 min. La partida se produce con distribución uniforme entre la llegada del tren y las 11 hs. Sean X = hora de llegada, Y = hora de partida.

(a) Hallar la función de densidad de X; la densidad de $Y|X = x$ y la densidad de Y.

(b) Calcular $\text{cov}(X, Y)$.

(c) Hallar $E(Y)$ de dos modos distintos.

12. Sea $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ y supongamos que $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x)$.

    (a) Hallar f_{XY}, f_X, f_Y, $f_{X|Y}$.

    (b) Calcular $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4} \mid Y = y)$.

13. Sean X e Y v. a. continuas tales que $Y \sim \Gamma(2, \lambda)$, $X|Y = y \sim \mathcal{U}(0, y)$.

    (a) Hallar f_{XY}, f_X.

    (b) Calcular $P(Y \geq 2|X \leq 1)$ si $\lambda = 1$.

14. Sean X e Y v. a. i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$. Probar que X/Y (el cociente de las variables aleatorias) es Cauchy sin usar el teorema de cambio de variables.

15. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2}{2x^3} \exp\left(-x - \frac{y}{x}\right) I_{[0,\infty]\times(0,\infty)}(x, y)$$

    (a) Hallar la densidad de $Y|X = x$ y decir a qué familia pertenece.

    (b) Hallar la densidad de Y/X sin usar el teorema de cambio de variables.

    (c) Calcular $P\left(1 < \frac{Y}{X} < 4|X = 3\right)$

16. Supongamos que una oficina postal está atendida por 2 empleados. Cuando el Sr. Cortez entra en la oficina, ve que la Sra. Álvarez está atendida por un empleado y el Sr. Benítez por otro. Supongamos que el Sr. Cortez será atendido tan pronto como la Sra. Álvarez o el Sr. Benítez se vayan.

    (a) Si el tiempo que tarda en atender un empleado a un cliente es una v.a. $\varepsilon(\lambda)$, encontrar la probabilidad de que de los tres clientes, el Sr. Cortez sea el último en irse del correo.

    (b) Si el tiempo que tarda un empleado en atender a un cliente no tuviera distribución exponencial sino otra distribución continua, ¿las distribuciónes de qué variables deberíamos conocer para poder responder a la pregunta del ítem anterior?

17. Las v.a. X e Y tienen distribución normal bivariada si su densidad conjunta es de la forma:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

(a) Mostrar que la densidad de $X|Y = y$ es normal con parámetros $\mu_x + \rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$ y $\sigma_x^2(1-\rho^2)$

(b) Mostrar que $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$

(c) Mostrar que X e Y son independientes si $\rho = 0$.

18. Las edades de los futuros padres que van a tener a sus hijos en un determinado hospital pueden ser aproximadas por una distribución normal bivariada con parámetros $\mu_x = 28.4$, $\sigma_x = 6.8$, $\mu_y = 31.6$, $\sigma_y = 7.4$ y $\rho = 0.82$ (los parámetros con el índice x se refieren a la edad de la mujer embarazada y los que tienen el índice y a los de su esposo).

   (a) Determinar la proporción de embarazadas de más de 30 años.

   (b) Sabiendo que el esposo tiene 35 años, hallar la probabilidad de que la mujer tenga más de 30 años. (Dicho de otro modo, hallar la proporción de hombres casados de 35 años cuyas mujeres tienen más de 30 años.)

19. Sean $(x, y) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ con:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \\ \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Mostrar que si se define:

$$\beta_0 = \mu_y - \beta_1\mu_x$$

$$\beta_1 = \rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$\sigma^2 = \sigma_y^2(1 - \rho_{xy}^2)$$

entonces la distribución condicional de y dado x es:

$$y|x \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$$

20. Sea (X, Y) un v.a. bidimensional tal que:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{3x^2}{y^3} I_{(0<x<y)}$$

$$f_Y(y) = 5y^4 I_{(0,1)}^{(y)}$$

   (a) Hallar la densidad de $U = \frac{X}{Y}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

   (b) Calcular $P\left(-2 < Y < \frac{\sqrt{3}}{2} | X = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. Sea (X, Y) v. a. tal que $X \sim \varepsilon(\frac{1}{2})$ e $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x^2)$.

   (a) Hallar la distribución de $\frac{Y}{X^2}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

(b) Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$.

22. Sean X e Y v.a. con densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} I_{(0,\infty)}^{(x)} I_{(0,\infty)}^{(y)}$$

Calcular $E(X|Y=y)$, $E(X^2|Y=y)$

23. Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y=y \sim \mathcal{P}(y)$, $Y \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, $\alpha>0$, $\lambda>0$. Probar que $Y|X=n \sim \Gamma(\alpha+n,\lambda+1)$, $n \in \mathbf{N}$.

24. Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y=y \sim \mathcal{B}i(n,y)$, $Y \sim \beta(p,q)$. Probar que $Y|X=k \sim \beta(p+k,q+n-k)$, $0 \le k \le n$.

25. Sea X una v.a. continua y g una función continua.

(a) Usando argumentos intuitivos, ver que

$$E\left(g(X)|X^2=t\right) = \frac{g\left(\sqrt{t}\right) f_X\left(\sqrt{t}\right) + g\left(-\sqrt{t}\right) f_X\left(-\sqrt{t}\right)}{f_X\left(\sqrt{t}\right) + f_X\left(-\sqrt{t}\right)}$$

(b) Usando la definición de esperanza condicional, probar que

$$E\left(g\left(X\right)|X^2\right) = \frac{g\left(\sqrt{X^2}\right) f_X\left(\sqrt{X^2}\right) + g\left(-\sqrt{X^2}\right) f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}{f_X\left(\sqrt{X^2}\right) + f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}$$

(c) Observar que $E\left(X^2|X\right) = X$ mientras que $E\left(X|X^2\right) \neq X$.

26. Sean X e Y v. a. tales que $Y \sim \mathcal{U}[2,3]$, $X|Y=y$ es una v. a. discreta que satisface

x	-1	0	1
$p_{X\|Y}(x\|y)$	$\dfrac{3-y}{2}$	$y-2$	$\dfrac{3-y}{2}$

(a) Hallar p_X.

(b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ y $P\left(\frac{3}{2} \le Y \le \frac{9}{4}|X=x\right)$.

27. Sean X e Y v. a. que satisfacen $X|Y=y \sim \varepsilon(y)$ e Y es tal que:

y	1	2
$p_Y(y)$	1/4	3/4

(a) Calcular $F_X(x)$ y $f_X(x)$.

(b) Calcular $P(Y=y, X \le x)$ para $y=1$,2, $x>0$.

(c) Expresar $P(Y=y, X \le x)$ en función de $P(Y=y|X=t)$.

(d) Deducir de 27.c el valor de $P(Y=1|X=x)$ para $x>0$.