Convergencia en probabilidad y casi segura

1. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v. a. independientes $X_n \sim \varepsilon(1)$. Sea $Y_n = \dfrac{X_n}{\ln n}$.

   (a) Probar que $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

   (b) Probar que $\lim_{n\to\infty} P(\cup_{m=n}^{\infty} |Y_m| \geq \epsilon) = 1$. Deducir que $P(Y_n \to 0) = 0$.

   (c) Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v. a. independientes tal que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n}$. Entonces $X_n \xrightarrow{p} 0$, pero $P(X_n \to 0) = 0$.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que $X_1 = 0$ y para $j \geq 2$

$$P(X_j = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{j^3} & \text{si} \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j \\ 1 - \dfrac{2}{j^2} & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

   Probar que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{si } \alpha > \frac{1}{2}$$

   Sugerencia: $\displaystyle\sum_{k=1}^{j} k^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes tales que $X_n \sim \mathcal{U}[0, a_n]$, $a_n > 0$. Probar que:

   (a) Si $a_n = n^2$ entonces con probabilidad 1 sólo un número finito de las X_n toma valores < 1.

   (b) Si $a_n = n$ entonces con probabilidad 1 un número infinito de las X_n toma valores < 1.

4. Se tira una moneda equilibrada infinitas veces en forma independiente. Consideremos una racha fija $(s_1, \ldots, s_k)$ donde $s_i = c, s$; $1 \leq i \leq k$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la racha aparezca entre el tiro n y el $n + k$?

   (b) Mostrar que la probabilidad de que la racha aparezca infinitas veces es 1.

5. Se elige al azar un número en el intervalo $[0, 1]$.

   (a) Encontrar la probabilidad de que la primera cifra decimal sea 2.

   (b) Encontrar la probabilidad de que la n-ésima cifra decimal sea 5 y la $(n+1)-$ésima sea 7.

(c) Sea B el suceso: "el número 57 aparece infinitas veces en el desarrollo decimal". Probar que $P(B) = 1$.

(d) Sea A_n el suceso: "el 9 aparece n veces consecutivas en los $2n$ primeros lugares". Calcular $P(A^\infty)$. con $A^\infty = \{A_n \text{ infinitas veces}\} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que sea racional?

Observación: Si un número admite dos desarrollos decimales se optará por el finito. Por ejemplo, se toma 0.745 y no $0.744\hat{9}$.

6. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{\geq 1}$ sucesiones de v. a. Probar que:

(a) Si $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$, $X_nY_n \xrightarrow{p} XY$.
Más generalmente $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(X, Y)$ para toda g uniformemente continua en ambas variables.
Si $X = a$ e $Y = b$ constantes entonces basta con que g sea continua en el punto (a, b).

(b) Si $X_n \xrightarrow{cs} X$ e $Y_n \xrightarrow{cs} Y$ entonces $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{cs} g(X, Y)$ para toda g continua.

(c) Si $X_n \xrightarrow{p} 0$ e Y_n está acotada en probabilidad entonces $X_nY_n \xrightarrow{p} 0$. Recordemos que una sucesión de v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada (uniformemente) en probabilidad si dado $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $P(|Y_n| \geq K) < \varepsilon$.
Igual resultado vale cambiando convergencia en probabilidad por convergencia cs.

(d) Si $|X_n| \leq c \quad \forall n$, entonces la condición necesaria y suficiente para que $X_n \xrightarrow{p} 0$ es que $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.

(e) Usando 6.d probar que si $X_n \xrightarrow{p} c$, donde c es una constante y si f es una función acotada y continua en c, entonces $\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = f(c)$.

7. Sean f y g funciones continuas en $[0, 1]$ tales que $0 \leq f(x) \leq cg(x)$ donde c es una constante positiva y $\int_0^1 g(x)\,dx > 0$.

(a) Sean $X_1, \ldots, X_n$ las coordenadas de un punto P elegido al azar en el cubo $[0, 1]^n$ (distribución uniforme).
Sean $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{n}$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(X_i)}{n}$
Verificar que:

$$Y_n \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$Z_n \xrightarrow{p} \int_0^1 g(x)\,dx$$

(b) Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{g(x_1) + \cdots + g(x_n)}\,dx_1 \cdots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_0^1 g(x)\,dx}$$

Sugerencia: Usar el ejercicio 6.d.

8. Veamos un ejemplo de variables aleatorias que convergen casi seguramente sin convergencia en ningún momento.
Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. tales que:

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}.$$

Mostrar que $X_n \overset{cs}{\to} 0$ pero $E(X_n^p) \not\to 0 \ \forall p \in \mathbb{N}$.

9. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $E(X_n) = 0$, $\text{var}(X_n) = \dfrac{k}{n}$, $k > 0$. Probar que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(\varepsilon) = 1$.

10. **Desigualdad de Chebyshev de un lado**

    (a) Si X es una v.a. tal que $E(X) = 0$ y $\text{var}(X) = \sigma^2 < \infty$ entonces $\forall a > 0$

    $$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

    (b) Un conjunto de 200 personas (integrado por 100 mujeres y 100 hombres) se divide aleatoriamente en 100 pares de 2 personas cada uno. Hallar la cota superior para la probabilidad de que menos de 30 de esos pares estén formados por una mujer y un hombre.

11. Un minorista recibe galletitas sin sal de 3 fábricas distintas siendo las cantidades recibidas medidas en kg. v.a. independientes X, Y, Z con distribuciones: $X \sim \mathcal{N}(100, 20)$, $Y = 97 + W$ con $W \sim \varepsilon(\frac{1}{3})$ y $Z \sim \mathcal{U}[80, 90]$. Acotar inferiormente la probabilidad de que el total recibido se encuentre entre 275 y 295.

12. Una máquina produce rieles cuya longitud es una v.a. con distribución $\mathcal{U}[0.8, 1.2]$. Se eligen al azar n rieles en forma independiente y se forma el promedio $\overline{X}$ de sus longitudes. Hallar n para que:

    $$P(0.99 < \overline{X} < 1.01) > 0.90.$$

13. Una máquina produce artículos de 3 clases: A, B y C en proporciones 25%, 25% y 50% respectivamente. Las longitudes de los artículos A y B siguen distribuciones $\mathcal{U}[0, 1]$ y $\mathcal{U}[0, 2]$ respectivamente y las longitudes de los artículos C se distribuyen según la densidad $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) I_{[0,2]}(x)$. Se eligen n artículos al azar de la producción total y se calcula el promedio de sus longitudes.

    (a) Dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 140$.

    (b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90?.

14. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización del consumo de marihuana (p es desconocida). Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima p a partir de la frecuencia relativa f_r que se define por

$$f_r = \frac{\text{N}^o\text{de personas encuestadas que están a favor de la legalización}}{50}$$

Observar que f_r es una variable aleatoria, y p es un número. Cuánto más cerca esté f_r de p, mejor estimador será. Hallar una cota superior para $P(|f_r - p| > 0.1)$ que no dependa de p.

15. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. independientes con $P(X_n = n^\theta) = P(X_n = -n^\theta) = \frac{1}{2}$ y $\overline{X}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$. Probar que si $0 < \theta < \frac{1}{2}$ entonces $\overline{X}_n \overset{p}{\underset{n\to}{}} 0$.

16. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$. Hallar el límite cs. de Y_n donde $Y_n = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$.

17. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $E(X_1) = \mathrm{var}(X_1) = 1$. Entonces

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{\left(n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}} \overset{cs}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

18. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $E(|X_1|^2) < \infty$. Hallar

$$\lim_{n\to\infty} E(X_1 | X_1 + \cdots + X_n)$$

Sugerencia: Probar que $E(X_1|X_1 + \cdots + X_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Convergencia en Distribución, Funciones características y Teorema Central del Límite

19. Hallar la función característica de X cuando X tiene distribución:

    (a) $\mathcal{P}(\lambda)$
    (b) $\mathcal{B}i(n,p)$
    (c) $\varepsilon(\lambda)$

20. Probar usando funciones características que si X e Y son independientes entonces

    (a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

(b) $X \sim \mathcal{B}i(n,p), Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X+Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$

(c) Hallar la función característica de $\Gamma(n,\lambda)$ para $n \in \mathbb{N}$, y de una χ^2_n.

(d) Calcular para las variables anteriormente nombradas los primeros cuatro momentos, es decir, las $E\left(X^k\right)$ con $k = 1, \ldots, 4$.

21. Probar que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto a 0 si solo si $\phi_X(t)$ es real para todo $t \in \mathbb{R}$.

22. Mostrar que si $(X_n)_{n\geq 1}$ son independientes y simétricas respecto de 0, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ también tiene distribución simétrica respecto de 0.

23. Sean $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y X v.a. discretas a valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

24. .

(a) Usando que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|t|}$$
hallar la función característica de una v.a. Cauchy.

(b) Verificar que $\phi_{2X} = \phi_X^2$ con lo cual ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$, aunque X e Y no sean independientes.

(c) Hallar la distribución de $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ con X_i i.i.d. Cauchy.

25. .

(a) Sean X e Y v.a. i.i.d. con $E(X) = 0$ y $Var(X) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$ y tales que $X+Y$ y $X-Y$ son v.a. independientes.

i. Probar que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^3 \phi_X\left(-\frac{t}{2}\right)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

ii. Probar que $\phi_X(t) = \phi_X(-t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, usando el desarrollo de Taylor de orden 2.

iii. Deducir que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^4$.

iv. A partir del ítem anterior deducir que $X \sim N(0,\sigma^2)$.

(b) Sean X e Y v.a. i.i.d. tales que $Z = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ tiene la misma distribución que X y $0 < Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Probar que $X \sim N(0,\sigma^2)$.

26. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. $X_n \sim \mathcal{U}[0,1]$. Sean $Y_n = \min(X_1,\ldots,X_n)$, $Z_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$, $U_n = nY_n$, $V_n = n(1-Z_n)$. Probar que:

(a) $Y_n \xrightarrow{P} 0$, $Z_n \xrightarrow{P} 1$.

(b) $U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$, $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ donde $W \sim \varepsilon(1)$.

27. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. tales que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ y definamos $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$. Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1,1]$.

    Sugerencia: Usar que $\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}$.

28. Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con densidad:

    $$f_X(x) = \frac{2}{x^3} I_{(1,\infty)}(x).$$

    Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right)$.

29. Se arroja una moneda, si sale cara se tira 3 veces un dado, si sale ceca se tira 5 veces. Se repite el juego 30 veces. Calcular aproximadamente la probabilidad de obtener más de 22 ases.

30. Una fábrica de tela tiene una tanda de 30 rollos puestos en venta. Se sabe que los metros de tela de una tercera parte de ellos tienen una distribución $\mathcal{U}[10,30]$ y el número de metros de tela de los rollos restantes tienen una distribución $\mathcal{U}[20,30]$. Una tienda compró 30 rollos de tela.

    (a) Calcular la probabilidad de que un rollo elegido al azar contenga más de 20 metros de tela.

    (b) Calcular la probabilidad de que la tienda haya comprado por lo menos 650 metros de tela.

    (c) Calcular cuántos rollos debería comprar la tienda para que la probabilidad de adquirir por lo menos 800 metros de tela sea 0.95.

31. En una tabaquería, la demanda de cajas de habanos es $\mathcal{P}(2)$. Cada mañana el dueño completa su stock de manera de tener 2 cajas. Cada caja le deja una ganancia de \$20. Cuando reúna la suma de \$1200 se va de vacaciones al Sur. No trabaja los domingos y empieza a trabajar el día 10 de noviembre.

    (a) Calcular la probabilidad de que pueda irse de vacaciones el día 22 de diciembre por la mañana.

    (b) Calcular una fecha f_0 tal que la probibildad que pueda partir en f_0 sea aproximadamente 0.95.

32. Con referencia al **ejercicio 13,**

    (a) Calcular aproximadamente la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 140$. Comparar con la cota hallada en el ejercicio 13 a). ¿Es una cota fina del valor calculado con el Teorema Central del Límite?

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90?. Hallarlo usando el TCL y compararlo con el hallado en el ejercicio 13 b).

33. Con referencia al **ejercicio 14,** rehacerlo usando el TCL y comparar la bondad de las cotas obtenidas con este teorema y con la desigualdad de Chebychev.

34. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. tales que $\sqrt{n}(X_n - \mu)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g es derivable, g' es continua en μ, $g'(\mu) \neq 0$.

   (a) Mostrar que
   $$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2[g\prime(\mu)]^2)$$

   (b) ¿Cuál será la distribución de $n[g(X_n) - g(\mu)]$ cuando $n \to \infty$ si $g'(\mu) = 0$ pero $g''(\mu) \neq 0$?

   Sugerencia: Usar el desarrollo de Taylor de la función g del orden adecuado.

35. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $X_n \sim \mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta > 0$. Probar que
   $$\sqrt{n}[\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$$
   donde $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

36. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. tales que $E(X_1) = 0$, $E(X_1^2) = 2$, $E(X_1^4) < \infty$ y $P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = 0\right) = 0\ \forall n$. Hallar el límite en distribución de las siguientes variables aleatorias, aclarando las herramientas teóricas utilizadas en cada caso.

   (a) $Y_n = \left(\sqrt{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$

   (b) $Z_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}$

   (c) $W_n = n\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$.

37. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Hallar la distribución límite de $\sqrt{n}(\overline{X}^2 - \lambda^2)$.