1. (a) Demostrar que la función

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x-y} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

no es función de distribución de un vector aleatorio.

(b) Mostrar que:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

sí lo es.

2. Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases}$$
$$Y = k \quad \text{si se extraen } k \text{ bolitas negras}$$

(a) Hallar p_{XY} y F_{XY}.

(b) Hallar p_X y p_Y. Determinar si X e Y son independientes.

3. Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) $\mathcal{B}i(4, \frac{1}{3})$. Sea $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$. Calcular $P(Y = 0)$.

4. Se arroja un dado equilibrado 2 veces. Sean $X_i = n^0$ obtenido en la tirada i $(i = 1, 2)$.

(a) Sea $Y = X_1 + X_2$. Hallar p_Y.

(b) Sea la variable aleatoria

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \text{ es par} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Determinar si X_1 y Z son independientes.

5. Sean X e Y v.a. independientes. Probar que si:

(a) $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$.

(b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

(c) $X \sim \mathcal{G}(p)$, $Y \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{BN}(2,p)$.

(d) $X \sim \Gamma(p,\lambda)$, $Y \sim \Gamma(q,\lambda) \Rightarrow X + Y \sim \Gamma(p+q,\lambda)$.

(e) $X \sim \varepsilon(\lambda) \Longleftrightarrow X \sim \Gamma(1,\lambda)$.

6. Se sabe que en la provincia de Salta la proporción de hombres de ojos azules es 20%, de ojos verdes es 5%, de ojos negros es 10% , otro color de ojos es 65%. Josefina decide viajar de la capital salteña a una ciudad a 200 km. donde se realizará un congreso médico sobre alcoholismo. Para ello debe tomar 2 colectivos en los que viajan sólo salteños. Para llevar a cabo una prueba decide tomar una copa de jerez con cada hombre de ojos verdes o azules que encuentre en su viaje. Como su belleza es irresistible, todos los hombres aceptan su invitación. En el primer colectivo viajan 10 hombres de los cuales ninguno trasborda al siguiente. En el segundo hay 8 hombres.

(a) Calcular la probabilidad de que en la primera parte del trayecto haya tomado menos de 4 copas.

(b) Calcular la probabilidad de que tome más de 3 copas en total.

7. El número de ballenas macho que aparecen semanalmente en el Golfo Nuevo sigue una distribución $\mathcal{P}(2)$, mientras que el número de hembras sigue una distribución $\mathcal{P}(2.5)$. Suponiendo que el número de machos es independiente del de las hembras:

    (a) Hallar la probabilidad de que en una semana haya 2 o más ballenas.

    (b) Si la semana pasada hubo 2 ballenas, encontrar la probabilidad de que hayan sido una pareja.

8. Felipe llega a la final de un torneo de básquet. La probabilidad de que su equipo gane un partido contra el otro finalista es p. Los organizadores proponen jugar un número impar de partidos y declarar ganador del torneo a quien gane la mitad más uno de los partidos jugados. Felipe, como capitán de su equipo, es consultado acerca de cuántos partidos prefiere jugar, si $2k-1$ ó $2k+1$ con k un número entero que los organizadores determinaron (no sabemos cual, pero sabemos que está fijo de antemano). Felipe conoce p (aunque nosotros no lo conocemos), ¿para qué valores de p es preferible jugar $2k+1$ partidos?

    Notar que esto responde a la pregunta de si la estrategia que emplea la NBA para decidir el ganador de una serie de playoffs (declarar ganador al mejor de 7 partidos) favorece al mejor de los equipos, o por el contrario, tiende a beneficiar al menos capacitado, con respecto a la estrategia de jugar una única final. (Dejando la facturación por partido de lado).

9. El 10% de la población fuma cigarrillos negros, el 35% fuma cigarrillos rubios, el 3% fuma pipa y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas, siendo

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{ número de personas que no fuman,.} \\ Y_2 &= \text{ número de personas que fuman cigarrillos rubios,} \\ Y_3 &= \text{ número de personas que fuman cigarrillos negros,} \\ Y_4 &= \text{ número de personas que fuman pipa.} \end{aligned}$$

    (a) Hallar la distribución de (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4). Cuando se pide la distribución del vector aleatorio se puede contestar dando la función de probabilidad puntual del vector.

    (b) Hallar la distribución de $(Y_1, Y_2 + Y_3, Y_4)$.

    (c) Hallar la distribución de Y_2+Y_3. ¿Qué sentido tendría hallar la distribución conjunta de (Y_2+Y_3, Y_1+Y_4) (es decir, la distribución conjunta del vector aleatorio de dos componentes agrega información nueva a la contenida en la distribución marginal de la primer coordenada)?

10. El tiempo de duración de los tubos fluorescentes que fabrica una determinada empresa tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.7$ horas. Para hacer un control de calidad se eligen al azar de la producción semanal 30 lámparas. Calcular la probabilidad de que entre las 30 elegidas, 5 lámparas tengan duración entre 0 y 3 horas, 7 lámparas tengan duración entre 3 y 4.5 horas, 10 lámparas tengan duración entre 4.5 y 5.5 horas y las 8 lámparas restantes tengan duración mayor que 5.5 horas.

11. Consideremos nuevamente el **Esquema de Polya** (ejercicio 6 de la práctica 2): De un bolillero que contiene B bolillas blancas, $B \geq 1$ y R rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \geq 1$. Sean

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraída es roja} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraída es blanca} \end{cases}$$

    (a) Hallar la función de probabilidad de (X_i, X_{i+1}) y la marginal de X_i. ¿Son las X_i idénticamente distribuidas?

(b) Hallar $P\left(X_{i+1}=1 \mid X_i=1\right)$.

(c) Hallar $P\left(X_3=1 \mid X_1=1,\ X_2=1\right)$. ¿Es $\left(X_i\right)_i$ una cadena de Markov?

12. Sea (X,Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{4ab}\, I_{|x|\leq a}\, I_{|y|\leq b}$$

para $a,b>0$, es decir, el vector (X,Y) tiene distribución uniforme en el rectángulo $[-a,a]\times[-b,b]$.

(a) Hallar f_X, f_Y, F_{XY}.

(b) Decir si X e Y son independientes justificando la respuesta.

13. Sean X, Y, Z v.a.i.i.d. $\mathcal{U}[0,1]$. Calcular $P(X\geq YZ)$.

14. Sea (X,Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c(3y+x) & 0\leq x\leq y\leq 1\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Hallar c, f_X, f_Y, F_X, F_Y, $P(X<\frac{Y}{3})$, $P(X^2-Y^2=3)$.

15. Sea (X,Y) una v. a. con densidad uniforme en el trapecio de vértices $(-6,0)$, $(-3,4)$, $(3,4)$, $(6,0)$.

(a) Obtener la función de densidad conjunta de (X,Y) y las marginales de X y de Y.

(b) Decir si X e Y son independientes justificando la respuesta.

16. Se define el soporte de la probabilidad P definida sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}_k)$

$$\begin{aligned}\operatorname{sop}(P) &= \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k \mid P(B_\varepsilon(\mathbf{x}))>0,\quad \forall\varepsilon>0\right\}\\ \text{donde } B_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^k \mid \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|<\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

(a) Probar que si $X=(X_1,X_2)$ es un vector aleatorio que induce la probabilidad $P_X=P$ en $\mathbb{R}^2$, es decir $P_X(B)=P\left(X^{-1}(B)\right)$ $\forall B\in\mathcal{B}_2$, se cumple que: si $\operatorname{sop}(P)\neq\operatorname{sop}(P_1)\times\operatorname{sop}(P_2)$, donde P_i son las marginales, entonces X e Y no son independientes.

(b) Volver a responder 12.b y 15.b.

17. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Probar que $X+Y$ y $\dfrac{X}{Y}$ son independientes.

18. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Sea (ρ,θ) la expresión de (X,Y) en coordenadas polares, es decir $(X,Y)=(\rho\cos(\theta),\rho\operatorname{sen}(\theta))$, $\rho\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi$.

(a) Probar que ρ y θ son independientes.

(b) Hallar la probabilidad de que el par (X,Y) caiga en el círculo de centro en el origen y radio σ.

(c) Mostrar que θ tiene distribución uniforme.

(d) Notar que de esto se deduce que $P(X>0,Y>0)=P(X>0,Y<0)=\frac{1}{4}$. Probarlo.

19. Sean X_1,X_2,X_3 v.a. independientes con distribución $\mathcal{U}[-1,1]$.

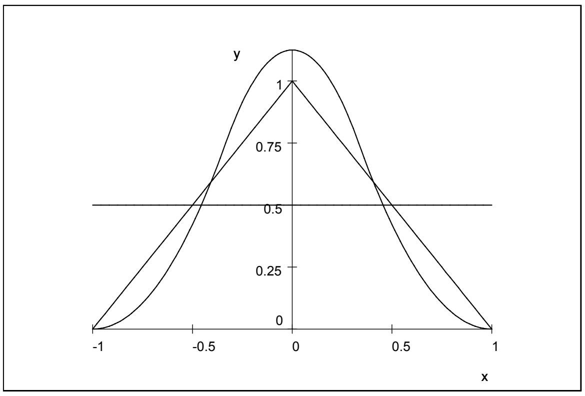
(a) Sea $U = \frac{X_1+X_2}{2}$. Verificar que:

$$f_U(u) = (u+1)\, I_{(-1,0)}(u) + (1-u)\, I_{(0,1)}(u).$$

(b) Sea $Z = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$. Usando 19.a verificar que:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{27}{16}\,(1-|z|)^2 & \text{si} \quad -1 < z < \frac{-1}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{3} < z < 1 \\ \frac{9}{8} - \frac{27}{8} z^2 & \text{si} \quad \frac{-1}{3} \leq z \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(c) Verificar que f_U es continua y que f_Z es derivable. (La convolución mejora la densidad).



20. Sea (X, Y) con función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{para } |x| < 1,\ 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Hallar f_X, f_Y.

(b) Determinar si X e Y son independientes.

(c) Probar que $U = \dfrac{Y}{X^2}$ es $\mathcal{U}[0,1]$.

21. Se elige un punto P al azar en el triángulo de vértices $(0,0), (1,1), (0,1)$. Se trazan por P las paralelas a los ejes, que intersecan con el eje vertical en el punto P' y con la recta $Y = X$ en el punto P" determinando el trapecio 0P'PP".

(a) Hallar la distribución del perímetro de trapecio.

(b) Hallar la probabilidad de que dicho perímetro sea ≤ 1.

22. Tres integrantes de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas.
El atleta A salta con distribución $\mathcal{U}[0,2]$.
El atleta B salta según una distribución cuya función de densidad es:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) I_{[0,2]}(x).$$

El atleta C salta según una distribución cuya función de densidad es:

$$f(x) = \frac{x}{2}\, I_{[0,2]}(x).$$

(a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.

(b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 1.2.

23. Un juego consiste en elegir un punto sobre una soga de 10 metros de longitud. Por jugar se pagan \$3 y se gana $\$|5 - X|$ donde X es el número elegido.

    (a) Hallar la distribución de la ganancia.

    (b) Supongamos que el juego se repite dos veces y se anota la mayor de las distancias al centro de la soga. Encontrar la distribución de la ganancia.

24. (a) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F. Se ordenan en orden creciente obteniéndose las variables aleatorias $X^{(1)} \leq \cdots \leq X^{(n)}$ que se denominan los estadísticos de orden de las variables aleatorias X_i. En particular:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \min_{1 \leq i \leq n} X_i \\ X^{(n)} &= \max_{1 \leq i \leq n} X_i \end{aligned}$$

    Obtener la función de distribución de $X^{(k)}$, $(1 \leq k \leq n)$.

    (b) Sea

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}\, I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}.$$

    Obtener la distribución de $X^{(1)}$.

    (c) Sea

$$F(x) = \frac{x}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) + I_{(\theta,\infty)}(x) \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}_{>0}.$$

    Obtener la distribución de $X^{(n)}$.

25. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. independientes con distribuciones exponenciales de parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivamente.

    (a) Mostrar que la distribución de $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ es exponencial.

    (b) Probar que:

$$P\left(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

    Sugerencia: Ver que X_k y $\min\limits_{i \neq k} X_i$ son independientes, y considerar el suceso $\left\{X_k \leq \min\limits_{i \neq k} X_i\right\}$.

26. Sea X una v.a. con densidad $\varepsilon(\frac{1}{3})$. Sea $Y = [X] + 1$.

    (a) Hallar la función de probabilidad puntual o densidad de la v.a. Y según corresponda. Notar que tiene distribución conocida.

    (b) Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. independientes con la distribución obtenida en 26.a, hallar $P\left(\min\limits_{1 \leq i \leq n} Y_i \leq 2\right)$.
    Sugerencia: Usar ejercicio 25.a.

27. Dos dados equilibrados se tiran independientemente. Sean N_1 y M_1 la primera vez que se obtiene un 1 como resultado para el primero y segundo respectivamente. Hallar la distribución de $N = \max(N_1, M_1)$.

28. (*) Sea $Z \sim N(0,1), X_1 \sim \chi^2(n)$ y $X_2 \sim \chi^2(m)$, variables aleatorias independientes.

(a) Probar que

$$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}}$$

tiene distribución t de Student con n grados de libertad con densidad dada por

$$f_U(u) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

(b) Probar que

$$V = \frac{X_1/n}{X_2/m}$$

tiene distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad con función de densidad

$$f_V(v) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} v^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}v\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(v).$$