1. Dada $\mathcal{C}$ una clase de conjuntos en $\mathbb{R}^k$, denotemos por $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$ a la clase de conjuntos en $\mathbb{R}^{k+1}$ definida por
$$\mathcal{C} \times \mathbb{R} = \{C \times \mathbb{R} : C \in \mathcal{C}\}.$$
Demostrar que $\sigma(\mathcal{C} \times \mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) \times \mathbb{R}$. ¿Se podría generalizar esto poniendo en lugar de $\mathbb{R}$ a $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera?

2. Demostrar por inducción que
$$\sigma\left(\left\{B_1 \times \cdots \times B_k : B_i \in \mathcal{B}^1, 1 \le i \le k\right\}\right) \subseteq \sigma\left(\text{abiertos en } \mathbb{R}^k\right),$$
donde $\mathcal{B}^1$ denota a los borelianos de $\mathbb{R}$.

3. Probar el siguiente lema.

   Lema: La $\sigma-$ álgebra de los borelianos de $\mathbb{R}^k$, es decir $\mathcal{B}^k$, es generada por las siguientes familias de conjuntos.

   i. Bolas en $\mathbb{R}^k$, de cualquier centro y radio.
   ii. Abiertos en $\mathbb{R}^k$.
   iii. $\left\{B_1 \times \cdots \times B_k : B_i \in \mathcal{B}^1, 1 \le i \le k\right\}$.
   iv. $\{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_k, b_k] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le k\}$.
   v. $\left\{\bigcup_{j=1}^{n} \left(a_1^j, b_1^j\right] \times \cdots \times \left(a_k^j, b_k^j\right] : a_i^j, b_i^j \in \mathbb{R}, 1 \le i \le k, , 1 \le j \le n, n \in \mathbb{N}, \right\}$, la unión es sobre conjuntos disjuntos.

4. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio definido en él, definimos la probabilidad inducida en $\left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k\right)$ por
$$P_{\mathbf{X}}(B) = P\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\right)$$
con $B \in \mathcal{B}^k$. Demostrar que $\left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k, P_{\mathbf{X}}\right)$ es un espacio de probabilidad.

5. (a) Sean $X \sim Bi(1, p)$, $Y \sim Bi(1, q)$ independientes con $0 < p < q < 1$. Hallar la distribución conjunta del vector (X, Y).

   (b) Sea $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Sean $X = I_{(0,p)}(U)$ e $Y = I_{(0,q)}(U)$ con $0 < p < q < 1$. Hallar la distribución conjunta del vector (X, Y). Hallar las distribuciones marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes? *Observación*: En este caso se dice que las variables X e Y están acopladas.

6. Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}^k$ probar que

   (a) $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$.
   (b) $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$.
   (c) $\limsup_{n\to\infty} I_{A_n} = I_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$.
   (d) $\liminf_{n\to\infty} I_{A_n} = I_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$.

   Recordar que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ y $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.