1. Para los paseos al azar donde
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la partícula sube en el instante iésimo} \\ -1 & \text{si la partícula baja en el instante iésimo,} \end{cases}$$
son v.a. independientes con $P(X_i = 1) = p$, y
$$S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$$
indica la posición de la partícula iésima en el instante jésimo,
   (a) hallar $E(X_i)$, $\operatorname{var}(X_i)$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ y $\rho(X_i, X_j)$ para $i < j$.
   (b) Hallar $E(S_j)$, $\operatorname{var}(S_j)$, $\operatorname{cov}(S_i, S_j)$ y $\rho(S_i, S_j)$ para $i < j$.

2. Consideremos nuevamente el **Esquema de Polya** (ej. 6 prác. 2 y ej. 11 prác. 4): De un bolillero que contiene B bolillas blancas, $B \geq 1$ y R rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraida al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \geq 1$. Sean
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraida es roja} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraida es blanca} \end{cases}$$
   (a) Hallar $E(X_i)$, $\operatorname{var}(X_i)$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ y $\rho(X_i, X_j)$ para $i < j$..
   (b) Sea $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ el número de bolillas rojas extraídas luego de j extracciones. Hallar $E(S_j)$, $\operatorname{var}(S_j)$, $\operatorname{cov}(S_i, S_j)$ y $\rho(S_i, S_j)$ para $i < j$.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, y sean $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ los estadísticos de orden.
   (a) Hallar la distribución de $X^{(i)}$.¿A qué familia pertenece?
   (b) Hallar $E\left(X^{(i)}\right)$. ¿Qué relación guardan las esperanzas entre sí?
   (c) Calcular $\operatorname{var}\left(X^{(i)}\right)$.
   (d) ¿Para qué valor de i se minimiza la varianza? ¿Para cuál se maximiza?

4. Diremos que (X, Y) es un vector aleatorio con distribución normal bivariada (o normal multivariada en $\mathbb{R}^2$), que denotaremos $\mathrm{N}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ o $\mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, con $-1 < \rho < 1$, $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$,
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$
y
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$
cuando
$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\},$$
o, matricialmente escrito, si $\mathbf{X} = (X, Y)$
$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\left[\det(\Sigma)\right]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}.$$

(a) Verificar que ambas definiciones de f_{XY} coinciden.
(b) Notar que la matriz Σ resulta ser simétrica y definida positiva. Y que lo mismo vale para Σ^{-1}.
(c) Graficar las curvas de nivel de la densidad conjunta. ¿Qué curvas son?
(d) Hallar las distribuciones marginales de X e Y. Mostrar que $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
(e) Deducir de 4.d las esperanzas y varianzas de X e Y.
(f) Calcular $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.
(g) Probar que $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ es equivalente a que X e Y son independientes.

5. Sea $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ y W independiente de X tal que $P(W=1) = P(W=0) = \frac{1}{2}$. Definimos

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} X & \text{si } W = 1 \\ -X & \text{si } W = 0 \end{cases} \\ &= X I_{\{1\}}(W) - X I_{\{0\}}(W) \end{aligned}$$

(a) ¿Son X e Y independientes?
(b) ¿Son Y y W independientes?
(c) Mostrar que $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$.
(d) Mostrar que $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

6. (a) Probar la desigualdad de **Cauchy-Schwartz**. Es decir

$$[E(XY)]^2 \leq E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right). \tag{1}$$

Sugerencia: Excepto cuando $Y = -tX$, en cuyo caso la desigualdad anterior se convierte en igualdad, vale que para todo t

$$0 < E\left([tX + Y]^2\right) = E\left(t^2 X^2 + 2tXY + Y^2\right). \tag{2}$$

Observar que (2) define un polinomio en t de grado dos sin raíces reales. Concluir que el discriminante de la ecuación cuadrática correspondiente es negativo. Deducir de ahí la desigualdad.

(b) Deducir de (1) o probar del mismo modo que en el ítem anterior pero a partir del cálculo de $\operatorname{var}(tX + Y)$ la siguiente desigualdad

$$[\operatorname{cov}(X, Y)]^2 \leq \operatorname{var}(X) \operatorname{var}(Y). \tag{3}$$

¿Qué relación deben cumplir X e Y para que valga la igualdad en (3)?

7. (a) Sea X una v.a. discreta, con $R_X = \mathbb{N}_0$, probar que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

(b) Sea X una v.a. cualquiera. Probar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

Concluir que

$$E(|X|) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty.$$

Sugerencia: Notar que $[\,|X|\,]$ (parte entera del módulo de X) es una variable aleatoria discreta y usar 7.a.

Densidad Normal Multivariada N((0,1),Id)