Axiomas de probabilidad

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos:
   (a) Se arroja un dado dos veces.
   (b) Se arroja un dado hasta que aparece el primer as.
   (c) De una caja que contiene 5 bolillas numeradas del 1 al 5, se extraen dos bolillas de dos maneras distintas: (i) con reposición y (ii) sin reposición.
   (d) Se elige al azar un punto en el círculo unitario.

2. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean los eventos:
   $A = \{$La suma de los resultados es par$\}$
   $B = \{$La suma de los resultados es 8$\}$
   $C = \{$Ambos resultados son distintos$\}$
   Explicitar el espacio muestral y calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - C$.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión de eventos en $\mathcal{F}$.
   * (a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-subaditividad).
   (b) Si $P(A_i) = 0, \forall i$ entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.
   (c) Si $P(A_i) = 1, \forall i$ entonces $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.
   * (d) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de eventos, es decir, $A_i \subseteq A_{i+1}$ $\forall i$, entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.
   (e) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de eventos, es decir, $A_{i+1} \subseteq A_i$ $\forall i$, entonces $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

* 4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos en A. Mostrar que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$.

5. Demostrar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ son dos sucesiones de eventos tales que $P(A_n) \to 1$ y $P(B_n) \to p$, entonces $P(A_n \cap B_n) \to p$.

6. Sea Ω un conjunto no vacío.
   (a) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos σ–álgebras de subconjuntos de Ω. Probar que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ también es una $\sigma-$álgebra, donde $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ si y sólo si $C \in \mathcal{F}$ y $C \in \mathcal{G}$.
   (b) Generalizar (a) de la siguiente manera: sean $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, una familia de σ-álgebras, donde I es un conjunto no vacío. Entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ también es una σ-álgebra.
   (c) Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de Ω. Mostrar que existe por lo menos una σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{C}$.
   (d) Utilizando todos los puntos anteriores mostrar que existe una menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Es decir una familia de subconjuntos de Ω que llamaremos $\mathcal{A}$ tal que (i) $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, (ii) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, (iii) Si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. La familia $\mathcal{A}$ se llama σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ y se representa por $\sigma(\mathcal{C})$.

(e) Sea $A_1, \ldots, A_n$ una partición del espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es decir, los A_i son subconjuntos disjuntos (dos a dos) del espacio muestral Ω, $A_i \in \mathcal{F}$, y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Obtener $\mathcal{A} = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$.

(f) Sea $B_1, \ldots, B_{n+1}$ una partición del espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tal que $B_i = A_i$, si $1 \leq i \leq n-1$ y $B_n \bigcup B_{n+1} = A_n$ (es decir, $\{B_i\}_{i=1,\ldots,n+1}$ es una partición más fina que $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$) Sea $\mathcal{B} = \sigma(B_1, \ldots, B_{n+1})$. ¿Se verifica alguna de las dos siguientes contenciones: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ó $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$?

7. Sean $A_1, ..., A_n$ eventos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   (a) **Principio de inclusión-exclusión**. Probar por inducción en n la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1+1}^{n} \sum_{i_3=i_2+1}^{n} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

   (b) ¿Cómo queda la fórmula anterior si los eventos cumplen $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = b_k$ para todo $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$? (Debería obtenerse una expresión con una sola sumatoria).

8. Sea Ω un espacio numerable, $\Omega = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, $p_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Probar que $P : \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por $P(A) = \sum_{v_n \in A} p_n$, resulta una probabilidad bien definida en $(\Omega, \mathcal{F})$.

Cálculo de probabilidades

9. En un ropero hay n pares de zapatos. Si se eligen al azar $2r$ zapatos (con $2r < n$) ¿Cuál es la probabilidad de que

   (a) no haya ningún par completo?
   (b) haya exactamente un par completo?
   (c) haya exactamente dos pares completos?

10. Felipe estaciona su auto en la calle, es decir en alguno de los lugares de una hilera de n autos, sin que quede en ninguna de las dos esquinas, porque va a la dentista. Cuando vuelve encuentra que exactamente r de los n lugares están todavía ocupados (esto incluye, claro está, su propio vehículo). ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lugares contiguos a su auto estén ocupados, es decir que Felipe se vea forzado a maniobrar mucho para poder sacar su auto, encima con su boca anestesiada y sin dirección hidráulica?

11. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar; sea la número k. Se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que k; sea la número j. Por último se hace una extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que j.

    (a) Describir el espacio muestral para este experimento y determinar el número de sus elementos.
    (b) ¿Es razonable pedir equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al $(1, 1, 1)$?

12. Un bolillero contiene N bolillas numeradas 1, 2,..., N. Se sacan una a una n bolillas $1 \leq n \leq N$, sin devolver al bolillero cada bolilla obtenida. Sean m y k enteros tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

    (a) se extraiga la bolilla m en la k-ésima extracción.

(b) se extraiga la bolilla m.

(c) el máximo número obtenido sea $\leq m$.

(d) el máximo número obtenido sea m.

(e) dados $a, b \in \mathbb{N}$, $n \leq a < b \leq N$, el máximo número obtenido está entre a y b inclusive.

(f) los números de las bolillas extraídas en el orden en que fueron extraídas constituyan una sucesión estrictamente monótona.

13. Resolver el ejercicio 12 en el caso en que cada bolilla obtenida sea devuelta al bolillero.

14. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B+N$.

(a) Hallar la probabilidad de que la k-ésima bolilla extraída, $1 \leq k \leq \min\{n, B, N\}$, sea

i. blanca.

ii. la primer blanca obtenida.

(b) Para $k = n$ sea p_n la probabilidad obtenida en (a) ii). Probar que si B y N tienden a infinito de modo que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_n \underset{N,B\to+\infty}{\longrightarrow} p(1-p)^{n-1}.$$

15. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B+N$. Hallar la probabilidad p_k de obtener exactamente k bolillas blancas $(0 \leq k \leq \min\{n, B\})$. Probar que si B y N tienden a infinito de modo que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_k \underset{N,B\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

16. (a) Si se colocan 4 bolillas en 4 cajas de acuerdo con la estadística de Bose-Einstein, es decir, bolillas indistinguibles entre sí en cajas distinguibles (es decir, numeradas) ¿cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga

i. exactamente una bolilla?

ii. exactamente dos bolillas?

iii. al menos una?

(b) Resolver el problema anterior para la estadística de Maxwell-Boltzman, es decir, bolillas distinguibles (numeradas) en cajas distinguibles (numeradas).

17. Se colocan 6 bolillas en 4 celdas. ¿Cuál es la probabilidad de que

(a) todas las celdas estén ocupadas?

(b) al menos 3 celdas estén ocupadas?
Resolver ambos items para la estadística de Bose-Einstein y de Maxwell-Boltzman. Si para M-B encontrás dificultades, pasá al ejercicio 18 y después volvé a éste.

18. Se reparten N bolillas distinguibles en n urnas distinguibles de tal modo que cada bolilla tiene la misma probabilidad de llegar a una urna cualquiera sea ésta (o sea, según la estadística de Maxwell-Boltzman). Sea A_i el suceso: "la i-ésima urna no está vacía".

(a) Mostrar que

$$V_k = P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^N, \quad k \leq n, \quad i_a \neq i_b \text{ para } a \neq b$$

Observar que dicha probabilidad no depende de los índices $i_1, \ldots i_k$ elegidos.

(b) Si $\frac{N}{n} = \lambda$ constante entonces $\lim\limits_{n,N \to \infty} V_k = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^k$.

19. Consideremos el caso que hemos tomado una muestra aleatoria con reposición de tamaño r de una población de n elementos $a_1, \ldots, a_n$ (supongamos equiprobabilidad en dicho espacio). Sea A el evento "en la muestra obtenida $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ no hay elementos repetidos".

(a) Hallar $P(A)$.

(b) Los cumpleaños de r personas forman una muestra de tamaño r de la población de todos los días del año. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y sabemos que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos considerar que una elección al azar de personas sea equivalente a realizar una selección al azar de las fechas de nacimientos y considerar que el año es de 365 días.
Hallar la probabilidad de que entre r personas elegidas al azar todas tengan distintas fechas de cumpleaños.
El resultado numérico es sorprendente. Por ejemplo para $r = 23$ tenemos que $p < \frac{1}{2}$, o sea que entre 23 personas, la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día es $> \frac{1}{2}$ (para $r = 30$, $p = 0.294$).

(c) Hallar la probabilidad de que si n bolillas distintas se distribuyen al azar en n cajas, estén todas las cajas ocupadas.
(Para $n = 7$, p ya es $0.00612\ldots$; para $n = 6$, $p = 0.01543\ldots$)
(Es muy improbable que en 6 tiradas de un dado salgan todos los números.)

(d) Repetir el ítem anterior usando el ejercicio 18, y deducir la siguiente identidad

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^n = n!$$

20. Se tienen N bolillas numeradas $1, 2, \ldots, N$ y N cajas numeradas. Se colocan al azar una bolilla en cada caja. Si coincide el número de la bolilla con el de la caja se dice que se produjo un apareamiento.

(a) Hallar la probabilidad de que ocurra por lo menos un apareamiento.
Sugerencia: Usar el principio de inclusión-exclusión.

(b) Probar que el límite de dicha probabilidad cuando $N \to \infty$ es $1 - e^{-1}$.

(c) n parejas casadas se han reunido a bailar. Cada caballero tiene la misma probabilidad de bailar con cualquier dama. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún caballero baile con su propia mujer?

(d) Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n > 1$. Hallar el número de biyecciones de I_n en I_n con al menos un punto fijo.