1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Consideremos el parámetro bivariado $\boldsymbol{\theta} = \left(\mu, \sigma^2\right)$.

   (a) Encontrar el EMV de $\boldsymbol{\theta}$.

   (b) Dado $\xi \in I\!R$, encontrar el EMV de $p = P_{\boldsymbol{\theta}}\left(X_1 > \xi\right)$.

   (c) Dado $p \in (0, 1)$, encontrar el EMV del valor ξ tal que $P_{\boldsymbol{\theta}}\left(X_1 > \xi\right) = p$.

   (d) Hallar el EMV de μ cuando σ^2 es conocido. ¿Es razonable que no dependa de σ^2?

   (e) Hallar el EMV de σ^2 cuando μ es conocido. ¿Es razonable que dependa de μ?

   (f) Se supone que la distribución de un índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son parámetros desconocidos. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar de la población y se obtienen los siguientes datos:

1.53	1.65	1.72	1.83	1.62	1.75	1.72	1.68	1.65	1.61
1.70	1.60	1.73	1.61	1.52	1.81	1.72	1.50	1.51	1.65
1.58	1.82	1.65	1.72	1.65					

   i) Estimar μ y σ^2 por máxima verosimilitud basados en la muestra dada.

   ii) Se considera que el índice es normal si es menor que 1.73. Estimar la proporción de la población con un índice anormal.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución exponencial desplazada, cuya densidad es
$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

   (a) Encontrar el EMV de θ.

   (b) Probar que el estimador hallado es fuertemente consistente.

3. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}\left[\theta - 1/2, \theta + 1/2\right]$, mostrar que cualquier T tal que $X_{(n)} - 1/2 \leq T \leq X_{(1)} + 1/2$ es un EMV de θ.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ una m.a. de una distribución $N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$, independientes entre sí.

   (a) Hallar el EMV de $\boldsymbol{\theta} = \left(\mu_1, \mu_2, \sigma^2\right)$.

   (b) Hallar el EMV de $\alpha = \mu_1 - \mu_2$.

   (c) Hallar el sesgo de los estimadores hallados anteriormente.

(d) Probar que los estimadores hallados anteriormente son fuertemente consistentes.

5. Se tienen observaciones independientes $X_1, \dots, X_n$ de poblaciones normales con la misma media μ pero con varianzas $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ respectivamente.

   (a) ¿Es posible estimar todos los parámetros por máxima verosimilitud?

   (b) Suponiendo $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ conocidos, hallar el EMV de μ. Interpretar.

6. Si $X_1, \dots, X_n$ es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}\,[0, \theta]$

   (a) Hallar el EMV de θ.

   (b) Hallar el sesgo de $\widehat{\theta}_{MV}$.

   (c) Probar que el estimador hallado es fuertemente consistente.

7. En un esfuerzo para determinar el tamaño de una población de animales se capturaron 100 animales que fueron marcados y liberados. Un tiempo después, fueron capturados otros 50 animales de los cuales 20 estaban marcados. ¿Cómo se podr ía estimar el tamaño de la población? ¿Qué supuestos se deben hacer sobre el proceso de captura/recaptura?