1. (a) Sean X e Y v. a. independientes. Probar que si:
   i. $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$.
   ii. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{B}i\left(k, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

   (b) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \mid X=k \sim \mathcal{B}i(k,p) \Rightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

2. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1-q=p$ de ser atrapado. Sean $X =$ cantidad de peces que pican, e $Y =$ cantidad de peces atrapados.

   (a) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.
   (b) Mostrar que la distribución de $(X-Y)|Y=y$ es $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.
   (c) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados.

3. Para decidir quién paga la cena, 2 amigos sacan 2 bolitas cada uno de una urna que contiene 3 bolitas blancas y 2 negras. El primero de ellos hace sus extracciones sin reponer. A continuación de la urna resultante el otro saca sus 2 bolitas con reposición. Si sacan igual número de bolitas blancas cada uno paga su cuenta, sino, la cuenta la paga el que haya sacado más blancas. Encontrar la probabilidad de que alguno pague las 2 cuentas.

4. Sea X tal que $E(X^2) < \infty$.

   (a) Verificar que:
   $$\mathrm{var}[E(X|Y)] = E[E^2(X|Y)] - E^2(X)$$
   Notar que no estamos trabajando con la varianza condicional de $X|Y$ (que es una variable aleatoria, $Var\,(X|Y) = E\left[[X - E\,(X|Y)]^2\,|Y\right]$) sino con la varianza de la variable $E(X|Y)$, que es un número.

   (b) Verificar que:
   $$E[E^2(X|Y)] = E[XE(X|Y)]$$
   Sugerencia: $E(X|Y) = h(Y)$.

   (c) Probar que:
   $$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}[E(X|Y)] + E\{[E(X|Y) - X]^2\}$$

   (d) Deducir que:
   $$\mathrm{cov}[X - E(X|Y), E(X|Y)] = 0.$$
   Interpretar geométricamente.

5. Sean $X_1, \ldots, X_m$ v. a. discretas independientes. Consideremos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sea $k < n < m$, probar que $S_k|S_n = x$ y $S_m|S_n = x$ son independientes.

6. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 y las 10 hs. 20 min. La partida se produce con distribución uniforme entre la llegada del tren y las 11 hs. Sean $X =$ hora de llegada, $Y =$ hora de partida.

(a) Hallar la función de densidad de X; la densidad de $Y|X = x$ y la densidad de Y.

(b) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 y 10:15 sabiendo que partió a las 10:25 horas.

(c) Calcular $\operatorname{cov}(X, Y)$.

(d) Hallar $E(Y)$ de dos modos distintos.

7. Sean X e Y v. a. continuas tales que $Y \sim \Gamma(2, \lambda)$, $X|Y = y \sim \mathcal{U}(0, y)$.

   (a) Hallar f_{XY}, f_X.

   (b) Calcular $P(Y \geq 2|X \leq 1)$ si $\lambda = 1$.

8. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{y^2}{2x^3} \exp\left(-x - \frac{y}{x}\right) I_{[0,\infty)\times(0,\infty)}(x, y).$$

   (a) Hallar la densidad de $Y|X = x$ y decir a qué familia pertenece.

   (b) Hallar la densidad de $\frac{Y}{X}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

   (c) Calcular $P\left(1 < \frac{Y}{X} < 4|X = 3\right)$.

9. Las v.a. X e Y tienen distribución normal bivariada si su densidad conjunta es de la forma:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\}$$

   Mostrar que la densidad de $X|Y = y$ es normal con parámetros $\mu_X + \rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$ y $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$.

10. Sea (X, Y) un v.a. bidimensional tal que:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{3x^2}{y^3} I_{(0<x<y)}$$

$$f_Y(y) = 5y^4 I_{(0,1)}^{(y)}$$

   (a) Hallar la densidad de $U = \frac{X}{Y}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

   (b) Calcular $P\left(-2 < Y < \frac{\sqrt{3}}{2}|X = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

11. Sea (X, Y) v. a. tal que $X \sim \varepsilon(\frac{1}{2})$ e $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x^2)$.

   (a) Hallar la distribución de $\frac{Y}{X^2}$ sin usar el teorema de cambio de variables.

   (b) Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $\operatorname{cov}(X, Y)$.

12. Sea (X, Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y = y \sim \mathcal{P}(y)$, $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Probar que $Y|X = n \sim \Gamma(\alpha + n, \lambda + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Sea (X, Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y = y \sim \mathcal{B}i(n, y)$, $Y \sim \beta(p, q)$. Probar que $Y|X = k \sim \beta(p + k, q + n - k)$, $0 \leq k \leq n$..

14. Sea X una v.a. continua y g una función continua.

(a) Usando argumentos intuitivos, ver que

$$E\left(g(X)|X^2=t\right)=\frac{g\left(\sqrt{t}\right)f_X\left(\sqrt{t}\right)+g\left(-\sqrt{t}\right)f_X\left(-\sqrt{t}\right)}{f_X\left(\sqrt{t}\right)+f_X\left(-\sqrt{t}\right)}$$

(b) Usando la definición de esperanza condicional, probar que

$$E\left(g\left(X\right)|X^2\right)=\frac{g\left(\sqrt{X^2}\right)f_X\left(\sqrt{X^2}\right)+g\left(-\sqrt{X^2}\right)f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}{f_X\left(\sqrt{X^2}\right)+f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}$$

(c) Observar que $E\left(X^2|X\right)=X^2$ mientras que $E\left(X|X^2\right)\neq X$.

15. Sean X e Y v. a. tales que $Y\sim\mathcal{U}[2,3]$, $X|Y=y$ es una v. a. discreta que satisface

x	-1	0	1
$p_{X\|Y}(x\|y)$	$\frac{3-y}{2}$	$y-2$	$\frac{3-y}{2}$

(a) Hallar p_X.

(b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ y $P\left(\frac{3}{2}\leq Y\leq\frac{9}{4}|X=x\right)$.

16. Sean X e Y v. a. que satisfacen $X|Y=y\sim\varepsilon(y)$ e Y es tal que:

y	1	2
$p_Y(y)$	1/4	3/4

(a) Calcular $F_X(x)$ y $f_X(x)$.

(b) Calcular $P(Y=y,X\leq x)$ para $y=1{,}2$, $x>0$.

(c) Expresar $P(Y=y,X\leq x)$ en función de $P(Y=y|X=t)$.

(d) Deducir de 16.c el valor de $P(Y=1|X=x)$ para $x>0$.