1. Hallar la función característica de X cuando X tiene distribución:

   (a) $\mathcal{P}(\lambda)$
   (b) $\mathcal{B}i(n,p)$
   (c) $\varepsilon(\lambda)$
   (d) $\mathcal{U}(a,b)$

2. Probar usando funciones características que si X e Y son independientes entonces

   (a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Rightarrow X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.
   (b) $X \sim \mathcal{B}i(n,p), Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X+Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$.
   (c) Hallar la función característica de $\Gamma(n,\lambda)$ para $n \in \mathbb{N}$, y de una χ_n^2.
   (d) Calcular para las variables anteriormente nombradas los primeros cuatro momentos, es decir, las $E\left(X^k\right)$ con $k = 1, \ldots, 4$.

3. Probar que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto a 0 si y sólo si $\phi_X(t)$ es real para todo $t \in \mathbb{R}$.

4. Mostrar que si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y simétricas respecto de 0, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ también tiene distribución simétrica respecto de 0.

5. (a) Usando que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}$$
   hallar la función característica de una v.a. Cauchy.
   (b) Sea X una v.a. con distribución Cauchy,.verificar que $\phi_{2X} = \phi_X^2$ con lo cual ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$, aunque X e Y no sean independientes.
   (c) Hallar la distribución de $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ con X_i i.i.d. Cauchy.

6. (a) Sean X e Y v.a.i.i.d. con $E(X) = 0$ y $Var(X) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$ y tales que $X+Y$ y $X-Y$ son v.a. independientes.
   i. Probar que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^3 \phi_X\left(-\frac{t}{2}\right)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
   ii. Probar que $\phi_X(t) = \phi_X(-t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, usando el desarrollo de Taylor de orden 2.
   iii. Deducir que $\phi_X(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\right]^4$.
   iv. A partir del ítem anterior deducir que $X \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.

   (b) Sean X e Y v.a.i.i.d. tales que $Z = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ tiene la misma distribución que X y $0 < Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Probar que $X \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

7. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X v.a. discretas a valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

8. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. $X_n \sim \mathcal{U}[0,1]$. Sean

$$\begin{array}{ll} Y_n = \min(X_1, \dots, X_n) & Z_n = \max(X_1, \dots, X_n) \\ U_n = nY_n & V_n = n(1 - Z_n). \end{array}$$

Probar que:

(a) $Y_n \xrightarrow{P} 0$, $Z_n \xrightarrow{P} 1$.

(b) $U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$, $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ donde $W \sim \varepsilon(1)$.

9. (a) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. tales que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ y definamos $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$. Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1,1]$.

Sugerencia: Usar el ejercicio 1 y la siguiente propiedad: $\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}$.

(b) Sea $(W_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. tales que $P(W_n = 1) = P(W_n = 0) = \frac{1}{2}$ y definamos $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{W_k}{2^k}$. Hallar la distribución límite de la sucesión Z_n. Notar que si se elige un número al azar $\omega \in (0,1)$ $Z_n(\omega)$ resulta el desarrollo binario (en base dos) de ω hasta su n-ésimo dígito decimal y W_k es el $k-$ésimo dígito binario. Interpretar en estos términos la distribución hallada.

10. Sean $X_1, \dots, X_{100}$ v.a. i.i.d. con densidad:

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} I_{(1,\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{75}\right)$.

11. Se arroja una moneda, si sale cara se tira 3 veces un dado, si sale ceca se tira 5 veces. Se repite el juego 30 veces. Calcular aproximadamente la probabilidad de obtener más de 22 ases.

12. Una fábrica tiene rollos de tela puestos en venta. Se sabe que los metros de tela de una tercera parte de ellos tienen una distribución $\mathcal{U}[10,30]$ y el número de metros de tela de los rollos restantes tienen una distribución $\mathcal{U}[20,30]$. Una tienda compró 30 rollos de tela.

(a) Calcular la probabilidad de que un rollo elegido al azar contenga más de 20 metros de tela.

(b) Calcular la probabilidad de que la tienda haya comprado por lo menos 650 metros de tela.

(c) Calcular cuántos rollos debería comprar la tienda para que la probabilidad de adquirir por lo menos 800 metros de tela sea 0.95.

13. En una tabaquería, la demanda de cajas de habanos es $\mathcal{P}(2)$. Cada mañana el dueño completa su stock de manera de tener 2 cajas. Cada caja le deja una ganancia de \$20. Cuando reúna la suma de \$1200 se va de vacaciones al Sur. No trabaja los domingos y empieza a trabajar el día 10 de noviembre.

(a) Calcular la probabilidad de que pueda irse de vacaciones el día 22 de diciembre por la mañana.

(b) Calcular una fecha f_0 tal que la probabilidad que pueda partir en f_0 sea aproximadamente 0.95.

14. Con referencia al **ejercicio 16 de la práctica 9,**

(a) Calcular aproximadamente la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 140$. Comparar con la cota hallada en el ejercicio 16 a). ¿Es una cota fina del valor calculado con el Teorema Central del Límite?

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90? Hallarlo usando el TCL y compararlo con el hallado en el ejercicio 16 b).

15. La demanda de períodicos que tiene un vendedor tiene distribución binomial con parámetros $n = 300$ y $p = 1/3$. Cada períodico lo compra a 3 pesos y lo vende en 4 pesos, pero no se le reembolsa el costo de los períodicos que compre y no venda. ¿Cuántos períodicos debe comprar para que valor esperado de si ganancia sea máxima? (Sugerencia: aproxime la binomial distribución utilizando el teorema de De Moivre-Laplace)

16. (aproximación normal a la distribución de Poisson, Feller cap VII, problema 9, pag. 193).

(a) Sea

$$p(\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

la distribución de Poisson con parámetro λ. Probar que

$$\sum_{\lambda - \alpha\sqrt{\lambda} < k < \lambda + \beta\lambda} p(\lambda, k) \to \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

cuando $\lambda \to +\infty$, siendo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

la distribución normal estándar. (sugerencia: aproximar los factoriales usando la fórmula de Stirling)

(b) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetro λ,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$S_n^* = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

Probar que la distribución de S_n^* se aproxima a la distribución normal cuando $n \to +\infty$ (como ocurrre en el teorema de De Moivre-Laplace).

17. Con referencia al **ejercicio 17 de la práctica 9,** rehacerlo usando el TCL y comparar la bondad de las cotas obtenidas con este teorema y con la desigualdad de Chebychev.

Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización del consumo de marihuana (p es desconocida). Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima p a partir de la frecuencia relativa f_r que se define por

$$f_r = \frac{\text{N}^o \text{ de personas encuestadas que están a favor de la legalización}}{50}$$

Observar que f_r es una variable aleatoria, y p es un número. Cuánto más cerca esté f_r de p, mejor estimador será. Hallar una cota superior para $P(|f_r - p| > 0.1)$ que no dependa de p.

18. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. tales que $\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g es derivable, g' es continua en μ, $g'(\mu) \neq 0$.

    (a) Probar que $X_n \xrightarrow{p} \mu$.

    (b) Mostrar que

    $$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \sigma^2[g\prime(\mu)]^2)$$

    Sugerencia: Usar el desarrollo de Taylor de la función g del orden adecuado.

    (c) ¿Cuál será la distribución de $n[g(X_n) - g(\mu)]$ cuando $n \to \infty$ si $g'(\mu) = 0$ pero $g''(\mu) \neq 0$?
    Sugerencia: Usar el desarrollo de Taylor de la función g del orden adecuado.

19. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $X_n \sim \mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta > 0$. Probar que

    $$\sqrt{n}[\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, \frac{1}{3})$$

    donde $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

20. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. tales que $E(X_1) = 0$, $E(X_1^2) = 2$ y $E(X_1^4) < \infty$. Hallar el límite en distribución de las siguientes variables aleatorias, aclarando las herramientas teóricas utilizadas en cada caso.

    (a) $Y_n = \left(\sqrt{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$

    (b) $Z_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}$

    (c) $W_n = n\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$.

21. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d. $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Hallar la distribución límite de $\sqrt{n}(\overline{X}^2 - \lambda^2)$.