## Probabilidad condicional

1. Hay 3 cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de B, y la de C es igual a su suma. Eligiendo al azar una caja se sacan de ella con reposición 2 piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que provengan de la caja A.

2. Para el ejercicio 11 de la práctica 1:

   (a) ¿Qué probabilidad le asignaría al $(4, 3, 1)$?

   (b) Calcular la probabilidad de sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo 1 en la segunda.

*3. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente.

   Urna A: 5 bolitas rojas y 3 blancas
   Urna B: 1 bolita roja y 2 blancas

   Se arroja un dado equilibrado. Si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolita de la urna A que se coloca en la urna B y luego se extrae una bolita de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

   (a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

   (b) Si ambas bolitas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que sean blancas?

4. Cuando se realiza un análisis de laboratorio para diagnosticar una cierta enfermedad en un paciente se está frente a la posibilidad de cometer dos tipos de errores en el diagnóstico. Sean $E$ el evento "la persona examinada está enferma" y $A$ el evento "el resultado del análisis es positivo, es decir que el análisis concluye que la persona examinada contrajo la enfermedad". Por supuesto, ambos eventos no tienen por qué coincidir (aunque eso sería lo deseable). Cuando no lo hacen, hay un error de diagnóstico: si el análisis da positivo pero el paciente está sano se dice que tenemos un falso positivo, si en cambio el análisis da negativo pero el paciente está enfermo se dice que tenemos un falso negativo. Para cada análisis se conocen la sensibilidad del test, es decir, la $P(A|E)$ y la especificidad del test, es decir, $P(A^c|E^c)$.

   (a) Supongamos que una prueba de laboratorio en particular es tal que

   $$P(A|E) = P(A^c|E^c) = 0.95.$$

   y que la probabilidad de que un paciente que se examina padezca la enfermedad es 0.005 (prevalencia de la enfermedad). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo en realidad esté enferma?

   (b) Sean ahora

   $$P(A|E) = P(A^c|E^c) = p \qquad\qquad P(E) = 0.005.$$

   ¿Para qué valor de $p$ es $P(E|A) = 0.95$? Interpretar la respuesta.

*5. Felipe busca sus medias rojas para vestirse para ir al dentista. En su placard hay $n$ cajones en los cuales pueden estar sus medias. Sea $p_i$ la probabilidad de que estén en el cajón $i$. Felipe, apurado, le da un vistazo rápido al contenido de los cajones, de manera tal que si las medias están en el cajón $i$, la probabilidad de que las vea es $\alpha_i$, pero si las medias no están en el cajón $i$, la probabilidad de que las vea ahí es 0. Calcular la probabilidad de que las medias estén en el cajón $j$, dado que al mirar en el $i$-ésimo cajón no las vio.

   *Sugerencia*: Considerar separadamente los casos $j = i$, $j \neq i$.

6. Consideremos el siguiente experimento llamado **Esquema de Polya**. De un bolillero que contiene $B$ bolillas blancas, $B \geq 1$ y $R$ rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar $n$ bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras $c$ bolillas del mismo color, $c \geq 1$.

   (a) Hallar la probabilidad de que:

      i. se obtenga una roja en la segunda extracción.

      ii. se obtenga una roja en la $n$-ésima extracción.
      *Sugerencia*: Tené cuidado al elegir el evento respecto del cual condicionás.

   (b) Probar que para todo $m < n$ la probabilidad de que se obtenga una roja en la $m$-extracción y una bolilla roja en la $n$-ésima extracción es

   $$\frac{R\,(R+c)}{(R+B)\,(R+B+c)}$$

   y una roja en la $m$-extracción y una bolilla blanca en la $n$-ésima extracción es

   $$\frac{RB}{(R+B)\,(R+B+c)}.$$

   Generalizar a más de dos extracciones.

   *Sugerencia*: En el 2.a se probó el caso $m = 1$, y todo $n$. Hacer inducción en $m$.

   (c) Hallar la probabilidad de que:

      i. se obtenga una roja en la tercera extracción dado que en la segunda se obtuvo una roja.

      ii. se haya obtenido una roja en la primera extracción dado que se obtuvo una roja en la $n$-ésima.

7. (a) Un dado se tira tantas veces como sea necesario para que aparezca un as. Suponiendo que el as no aparece en el primer tiro, ¿cuál es la probabilidad de que sean necesarios más de 3 tiros?

   (b) Supongamos que el número de tiros sea par, ¿ cuál es la probabilidad de que sea 2?

8. Se tienen $n + 1$ urnas numeradas $0, 1, \ldots, n$. La urna $i$ tiene $i$ bolillas blancas y $n - i$ negras. Se elige al azar una urna,

   (a) y se extrae de ella una bolilla al azar,

      i. hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.

      ii. Si la bolilla extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna $i$, $0 \leq i \leq n$?

   (b) y se realizan $k$ extracciones con reposición de la urna elegida,

      i. hallar la probabilidad de que las $k$ bolillas extraídas sean blancas.

      ii. Sabiendo que las $k$ bolillas extraídas son blancas, si se realiza una nueva extracción de esa misma urna, ¿cuál es la probabilidad de que esta última bolilla sea blanca?

9. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la n-ésima tirada, sabiendo que salió por lo menos una vez entre las $(m + n)$ primeras tiradas? $m \geq 1$.

10. Un modelo simplificado del pronóstico del tiempo
    Supongamos que el tiempo (seco o lluvioso) de mañana tendrá probabilidad $p$ de ser el mismo que el de hoy.

(a) Si el día $1^0$ de enero fue lluvioso, mostrar que $p_n =$ probabilidad de que el día (n+1)-ésimo de ese año sea lluvioso satisface

$$\begin{cases} p_n &= (2p-1)p_{n-1} + (1-p) \quad n \geq 1 \\ p_0 &= 1 \end{cases}$$

(b) Probar que

$$p_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^n] \quad n \geq 0$$

## Independencia

11. Se extrae al azar una bolilla de una urna que tiene 9 bolillas de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas, numeradas 1, 2, 3 en cada color. Además las siguientes bolillas son rayadas: $n°$ 1 blanca, $n°$ 2 negra y $n°$ 3 roja.
Sean los sucesos:
A: "la bolilla es número 1"
B: "la bolilla es blanca"
C: "la bolilla es rayada"

    (a) ¿Son los sucesos A, B, y C independientes de a pares?
    (b) ¿Son independientes los sucesos A, B y C?

12. Sean $a$, $b$ y $c$ tres jugadores que juegan por turnos a un juego que nunca se empata de acuerdo con la siguiente regla:
Empiezan $a$ y $b$. El perdedor es reemplazado por $c$. El juego continua de esta manera (el ganador juega con el que estaba afuera) hasta que un jugador gane 2 veces consecutivas convirtiéndose en el ganador del juego.

    (a) Escribir un espacio muestral.
    (b) Supongamos que en cada partido cada uno de los 2 jugadores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar.
        i. Calcular $P(a \quad a)$ y $P(a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad b)$.
        ii. Sea $B_i$ el evento "el jugador $a$ gana el partido $i$-ésimo". Hallar $P(B_1)$, $P(B_2)$ y $P\left(B_1 \bigcap B_2\right)$. ¿Son independientes los eventos $B_1$ y $B_2$?
        iii. Sea $A_4$ el evento el juego termina en el cuarto encuentro. Calcular $P(A_4)$.
        iv. Sea $w = (a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad \ldots \quad )$. Calcular $P(w)$.
        v. Mostrar que la probabilidad de que $a$ gane es 5/14 y calcular la de los otros dos. Verificar que las probabilidades de ganar no son iguales para los tres jugadores (de paso, ¿conviene o no jugar el primer partido?)

13. (a) Probar que el evento $A$ es independiente de cualquier evento $B$ si y sólo si $P(A) = 1$ ó 0.
    (b) Si $A \subset B$ y $A$ y $B$ son independientes entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.
    (c) Probar que si:
        i. A es independiente de $B \cap C$ y $B \cup C$,
        ii. B es independiente de $A \cap C$,
        iii. C es independiente de $A \cap B$,
        iv. $P(A), P(B), P(C) > 0$,

        entonces $A$, $B$ y $C$ son independientes.

(d) Probar que si $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$, siendo $A_i$ independientes, $1 \leq i \leq n$ entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i), \quad \forall \quad 1 \leq m \leq n$$

con lo cual $B_1 \dots B_m$ son independientes, $\forall \quad 1 \leq m \leq n$.
*Sugerencia:* Hacer inducción en el número de complementos de $A_i$ involucrados.

14. Sean $S_1 \dots S_n$ eventos independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Describir mediante uniones y/o intersecciones de ellos y hallar la probabilidad de que de los $S_i$ ocurra:

(a) al menos uno.

(b) exactamente uno.

(c) ninguno.

(d) exactamente $k$ en el caso $P(S_i) = p, \qquad 1 \leq i \leq n$.

15. (a) De un bolillero que contiene $n$ bolillas numeradas $1, 2, \dots, n$ se extrae una al azar. Sea $p$ un número primo y $A_p$ el evento: "el número de la bolilla elegida es divisible por $p$". Probar que si $p_1, p_2, \dots$ son distintos divisores primos de $n$ entonces los eventos $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots$ son independientes.

(b) Sea $\varphi(n)$ la función de Euler de la teoría de números, es decir $\varphi(n)$ es el número de enteros coprimos con $n$ y menores o iguales que $n$. Demostrar que

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primos: } p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$