

En cada ejercicio definir las variables aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. Sobre el escritorio de la secretaria de Felipe hay 4 cartas y los 4 sobres correspondientes a las cartas. La secretaria introduce las cartas en los sobres al azar; sea:

$$X = \text{número de cartas correctamente introducidas.}$$

Hallar p_X .

2. En una fábrica la proporción de piezas defectuosas que se fabrican es 0.02. Se toma una muestra con reposición de tamaño n . Hallar:

- (a) la probabilidad de 0 defectuosas en la muestra elegida.
- (b) la probabilidad de que haya más buenas que defectuosas en la muestra elegida.
- (c) la probabilidad de al menos 2 defectuosas en la muestra elegida.
- (d) Encontrar el número más probable de piezas defectuosas en la muestra cuando $n = 4$ y $n = 100$.

3. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.

- (a) Describir un espacio muestral asociado a este experimento.
- (b) Encontrar las funciones de probabilidad puntual y de distribución asociadas a X .
- (c) Calcular la probabilidad de que haga falta un número par de tiradas.
- (d) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de tiradas hasta el tercer as. Obtener la distribución de Y (distribución binomial negativa).

4. (a) Sea $X \sim Bi(n, p)$ e $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Demostrar que $P(X = 0) = P(Y > n)$.
(b) Hallar el número de niños que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de tener al menos un varón sea $\geq \frac{8}{9}$.

5. Se sabe que el 10% de los pacientes que presentan ciertos síntomas tienen una determinada enfermedad. El diagnóstico final de la misma depende de un análisis de sangre. Sin embargo, como los análisis individuales son caros, el hematólogo espera hasta que N pacientes que presentan los síntomas lo visiten. Entonces mezcla la sangre de los N pacientes y le hace el análisis. Si ninguna de las N personas está enferma, el análisis sobre la muestra de la mezcla de sangre es negativo. Sin embargo, si uno de los pacientes está enfermo, entonces el análisis dará positivo, y el hematólogo deberá hacer análisis individuales para determinar cuál de los pacientes tiene la enfermedad.

- (a) Encontrar la probabilidad de que el análisis sobre la sangre mezclada dé negativo.
- (b) Si $X =$ número de análisis que debe hacer el hematólogo sobre los N pacientes, determinar la función de probabilidad puntual de X .

- *7. En una sucesión de ensayos Bernoulli con probabilidad p de éxito, encontrar la probabilidad de que ocurran por lo menos A éxitos antes de B fracasos.
Sugerencia: la cuestión se decide después de no más de $A + B - 1$ ensayos.

8. Una rueda de ruleta está dividida en 38 secciones, de las cuales 18 son rojas, otras 18 negras y las 2 restantes son verdes. Sea X el número necesario de juegos para obtener una sección verde en jugadas independientes.

- (a) Encontrar la probabilidad de que al menos 4 jugadas sean necesarias.
- (b) Encontrar la probabilidad de que sean necesarias un número impar de jugadas.

9. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p , ($0 < p < 1$).

- (a) Verificar que si s y t son números naturales, entonces

$$P(X \geq s + t \mid X > t) = P(X \geq s).$$

(Propiedad de “falta de memoria o desgaste”).

- (b) Probar que la única distribución discreta concentrada en \mathbb{N}_0 con esta propiedad es la geométrica, de parámetro $p = P(X = 1)$.

*10. En una fábrica de generadores se producen diariamente 20 unidades, de las cuales el 20% es defectuosa. Si se vende una partida de 15 generadores, encontrar la probabilidad de que

- (a) no haya defectuosos en la partida.
- (b) haya a lo sumo un defectuoso en la partida.

11. Un comprador de componentes eléctricas los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar inspecciona 3 componentes elegidas al azar del lote, y lo aceptará si ninguna de las componentes revisadas está fallada. Si el 30% de los lotes tiene 4 componentes defectuosas y el 70% sólo una, encontrar la proporción de lotes que rechazará el comprador..

12. Sea X el resultado que se obtiene al arrojar un dado equilibrado una vez. Si antes de arrojar el dado se ofrece la opción de elegir entre recibir $\$ \frac{2}{7}$ ó $h(X) = \frac{1}{X} \$$, decidir cuál de las dos opciones es preferible, en el sentido de cuál tiene un mayor valor esperado.

13. Un juego consiste en arrojar un dado equilibrado hasta obtener un número mayor o igual que 4 por primera vez. Sea X el número de veces que se arroja el dado. El puntaje que se obtiene es $(4 - X)$ si $1 \leq X \leq 3$ y no se obtiene puntaje en caso contrario.

- (a) ¿Cuál es el puntaje esperado de este juego?
- (b) Si se juega dos veces este juego, y en total se obtuvieron 2 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que la primera vez no se haya obtenido puntaje?

14. Hallar la esperanza y varianza $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

15. Se distribuyen al azar N bolillas numerables en m urnas. Sean X el número de urnas vacías; Y el número de urnas que contienen exactamente una bolilla y Z el número de urnas que contienen dos o más bolillas.

- (a) Hallar $E(X)$.
Sugerencia: Sea

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima urna está vacía} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Verificar que $X = \sum_{i=1}^m X_i$.

- (b) Hallar $E(Y)$.
- (c) Hallar $E(Z)$.
- (d) Un centro cultural dispone de m cuentas de correo electrónico para comunicarse con el público. Durante un día en particular, N personas envían sus inquietudes vía e-mail al centro cultural, eligiendo una cuenta al azar para hacerlo. Hallar la esperanza del número de cuentas de correo que no son usadas durante dicho día.

16. Muestreo estratificado

Se quiere saber cuántos habitantes viven en una cierta ciudad. Se sabe que dicha ciudad tiene n manzanas, de las cuales n_j tienen x_j habitantes cada una ($n_1 + n_2 + \dots = n$). Sea $m = \sum_j \frac{n_j x_j}{n}$ el número medio de habitantes por manzana y sea $a^2 = \frac{1}{n} \sum_j n_j x_j^2 - m^2$. Para averiguarlo se sortean al azar r manzanas para encuestarlas. Un encuestador es enviado a cada una de las manzanas sorteadas para contar la cantidad de habitantes que viven en ellas. Definamos las variables aleatorias

- Z_i = cantidad de habitantes que viven en la i ésima manzana sorteada
- Y = cantidad de personas encuestadas.

- (a) Hallar $E(Z_i)$ y $\text{var}(Z_i)$.
- (b) Mostrar que

$$E(Y) = mr$$

$$\text{var}(Y) = \frac{a^2 r(n-r)}{n-1}.$$