En cada ejercicio definir las variables aleatorias involucradas y cuando sea posible identifique su distribución.

1. Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) $\mathcal{B}i(4, \frac{1}{3})$. Sea $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$. Calcular $P(Y = 0)$.

2. Se arroja un dado equilibrado 2 veces. Sean X_i = número obtenido en la tirada i $(i = 1, 2)$.

   (a) Sea $Y = X_1 + X_2$. Hallar p_Y.

   (b) Sea la variable aleatoria

   $$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \text{ es par} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   Determinar si X_1 y Z son independientes.

3. Sean X e Y v.a. independientes. Probar que si:

   (a) $X \sim \mathcal{B}i(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m, p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{B}i(n + m, p)$.

   (b) $X \sim \mathcal{G}(p)$, $Y \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{BN}(2, p)$.

   (c) $Y \sim \mathcal{G}(n, p)$ .Hallar la $E(Y)$.

4. Se sabe que en la provincia de Salta la proporción de hombres de ojos azules es 20%, de ojos verdes es 5%, de ojos negros es 10% , otro color de ojos es 65%. Josefina decide viajar de la capital salteña a una ciudad a 200 km. donde se realizará un congreso médico sobre alcoholismo. Para ello debe tomar 2 colectivos en los que viajan sólo salteños. Para llevar a cabo una prueba decide tomar una copa de jerez con cada hombre de ojos verdes o azules que encuentre en su viaje. Como su belleza es irresistible, todos los hombres aceptan su invitación. En el primer colectivo viajan 10 hombres de los cuales ninguno trasborda al siguiente. En el segundo hay 8 hombres.

   (a) Calcular la probabilidad de que en la primera parte del trayecto haya tomado menos de 4 copas.

   (b) Calcular la probabilidad de que tome más de 3 copas en total.

5. Felipe llega a la final de un torneo de básquet. La probabilidad de que su equipo gane un partido contra el otro finalista es p. Los organizadores proponen jugar un número impar de partidos y declarar ganador del torneo a quien gane la mitad más uno de los partidos jugados. Felipe, como capitán de su equipo, es consultado acerca de cuántos partidos prefiere jugar, si $2k - 1$ ó $2k + 1$ con k un número entero que los organizadores determinaron (no sabemos cual, pero sabemos que está fijo de antemano). Felipe conoce p (aunque nosotros no lo conocemos), ¿para qué valores de p es preferible jugar $2k + 1$ partidos?

   Notar que esto responde a la pregunta de si la estrategia que emplea la NBA para decidir el ganador de una serie de playoffs (declarar ganador al mejor de 7 partidos) favorece al mejor de los equipos, o por el contrario, tiende a beneficiar al menos capacitado, con respecto a la estrategia de jugar una única final. (Dejando la facturación por partido de lado).

6. El 10% de la población fuma cigarrillos negros, el 35% fuma cigarrillos rubios, el 3% fuma pipa y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas, siendo

   $$\begin{aligned} Y_1 &= \text{número de personas que no fuman,.} \\ Y_2 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos rubios,} \\ Y_3 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos negros,} \\ Y_4 &= \text{número de personas que fuman pipa.} \end{aligned}$$

   (a) Hallar la distribución de (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4). Cuando se pide la distribución del vector aleatorio se puede contestar dando la función de probabilidad puntual del vector.

   (b) Hallar la distribución de $(Y_1, Y_2 + Y_3, Y_4)$.

   (c) Hallar la distribución de $Y_2 + Y_3$. ¿Qué sentido tendría hallar la distribución conjunta de $(Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_4)$ (es decir, la distribución conjunta del vector aleatorio de dos componentes agrega información nueva a la contenida en la distribución marginal de la primer coordenada)?

7. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en el cual hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma una muestra de 8 de los cuales, al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable. Encontrar la probabilidad de que compre si en realidad hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables

8. Consideremos nuevamente el **Esquema de Polya** (ejercicio 6 de la práctica 2): De un bolillero que contiene B bolillas blancas, $B \geq 1$ y R rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \geq 1$. Sean

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraída es roja} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraída es blanca} \end{cases}$$

   (a) Hallar la función de probabilidad de (X_i, X_{i+1}) y la marginal de X_i. ¿Son las X_i idénticamente distribuidas?
   (b) Hallar $P\left(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 1\right)$.
   (c) Hallar $P\left(X_3 = 1 \mid X_1 = 1,\ X_2 = 1\right)$.

9. Se tiene una urna que contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases}$$

$$Y = k \quad \text{si se extraen } k \text{ bolitas negras}$$

   (a) Hallar p_{XY}.
   (b) Hallar p_X y p_Y. Determinar si X e Y son independientes.
   (c) Hallar $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$, $E(XY)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, $\mathrm{var}(X-Y)$, $\rho(X,Y)$.
   (d) Sea $Z = -4X + 1$, calcular $E(Z)$ y $\mathrm{var}(Z)$.

*10. El problema de las colecciones de cupones (o de figuritas)
Un álbum está compuesto por N figuritas distintas. Al comprar un sobrecito la probabilidad de obtener una figurita dada es la misma para todas las figuritas.

   (a) Hallar la esperanza del número de figuritas diferentes que hay en un conjunto de k figuritas.
   (b) Hallar el número esperado de figuritas que es necesario juntar para completar el álbum.

10. Dada una urna con N bolillas de las cuales D son blancas y $N - D$ son negras, se extraen n sin reposición. Sean

$$X = \text{número de bolillas blancas extraídas}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i-ésima bolilla extraída es blanca} \\ 0 & \text{si la i-ésima bolilla extraída es negra} \end{cases}$$

   (a) Probar que:

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{D(D-1)}{N(N-1)} \qquad \text{para } i \neq j$$

$$P(X_i = 1) = \frac{D}{N}$$

   Determinar la distribución conjunta de (X_i, X_j).
   (b) Calcular $E(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.
   (c) Calcular $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ para $i \neq j$.
   (d) Hallar $E\left(X\right)$. Ver que

$$\mathrm{var}(X) = \frac{(N-n)nD(N-D)}{(N-1)N^2}$$

   Sugerencia: Usar que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Notar que $X \sim \mathcal{H}\left(N, D, n\right)$.

11. Sea $(X_1, \ldots, X_k) \sim \mathcal{M}(p_1, \ldots, p_k, n)$, $n > 2$.

    (a) Hallar $E(X_i)$, $\text{var}(X_i)$, $\text{cov}(X_i, X_j)$. Interpretar.

    (b) Hallar el mejor predictor lineal de X_1 basado en $X_2 + X_3$ y el error de predicción.

12. Sean X e Y dos v.a. que toman sólo dos valores cada una. Probar que $\text{cov}(X, Y) = 0$ implica que X e Y son independientes.

    Sugerencia: Suponer primero que los dos valores que toma cada variable son 0 y 1. ¿Cómo se pasa luego al caso general?

13. Mostrar con un ejemplo que $\text{cov}(X, Y) = 0$ no implica que X e Y sean independientes.