1. (a) Demostrar que la función

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x-y} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

no es función de distribución de un vector aleatorio.

(b) Mostrar que:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

sí lo es.

2. Sean X e Y v.a. independientes. Probar que si:

   (a) $X \sim \Gamma(p, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(q, \lambda) \Rightarrow X + Y \sim \Gamma(p+q, \lambda)$.

   (b) $X \sim \varepsilon(\lambda) \iff X \sim \Gamma(1, \lambda)$.

3. El tiempo de duración de los tubos fluorescentes que fabrica una determinada empresa tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.7$ horas. Para hacer un control de calidad se eligen al azar de la producción semanal 30 lámparas. Calcular la probabilidad de que entre las 30 elegidas, 5 lámparas tengan duración entre 0 y 3 horas, 7 lámparas tengan duración entre 3 y 4.5 horas, 10 lámparas tengan duración entre 4.5 y 5.5 horas y las 8 lámparas restantes tengan duración mayor que 5.5 horas.

4. Sea (X,Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4ab} I_{|x| \leq a} I_{|y| \leq b}$$

para $a, b > 0$, es decir, el vector (X,Y) tiene distribución uniforme en el rectángulo $[-a,a] \times [-b,b]$.

   (a) Hallar f_X, f_Y, F_{XY}.

   (b) Decir si X e Y son independientes justificando la respuesta.

5. Sean X, Y, Z v.a.i.i.d. $\mathcal{U}[0,1]$. Calcular $P(X \geq YZ)$.

6. Sea (X,Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(3y + x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar c, f_X, f_Y, F_X, F_Y, $P(X < \frac{Y}{3})$, $P(X^2 - Y^2 = 3)$.

7. Sea (X,Y) una v. a. con densidad uniforme en el trapecio de vértices $(-6,0)$, $(-3,4)$, $(3,4)$, $(6,0)$.

   (a) Obtener la función de densidad conjunta de (X,Y) y las marginales de X y de Y.

   (b) Decir si X e Y son independientes justificando la respuesta.

8. Se define el soporte de la probabilidad P definida sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$

$$\begin{aligned} \text{sop}(P) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid P(B_\varepsilon(\mathbf{x})) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \right\} \\ \text{donde } B_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

(a) Probar que si $X = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio que induce la probabilidad $P_X = P$ en $\mathbb{R}^2$, es decir $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$ $\forall B \in \mathcal{B}_2$, se cumple que: si $\mathrm{sop}(P) \neq \mathrm{sop}(P_1) \times \mathrm{sop}(P_2)$, donde P_i son las marginales, entonces X e Y no son independientes.

(b) Volver a responder 4.b y 7.b.

9. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Probar que $X+Y$ y $\dfrac{X}{Y}$ son independientes.

10. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sea (ρ, θ) la expresión de (X, Y) en coordenadas polares, es decir $(X, Y) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

    (a) Probar que ρ y θ son independientes.

    (b) Hallar la probabilidad de que el par (X, Y) caiga en el círculo de centro en el origen y radio σ.

    (c) Mostrar que θ tiene distribución uniforme.

    (d) Notar que de esto se deduce que $P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, Y < 0) = \frac{1}{4}$. Probarlo.

11. Sean X_1, X_2, X_3 v.a. independientes con distribución $\mathcal{U}[-1, 1]$.

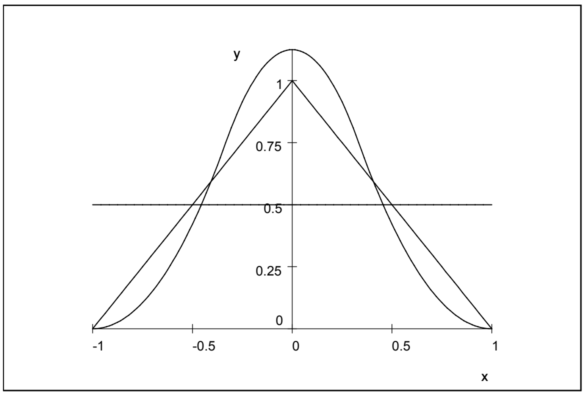
    (a) Sea $U = \frac{X_1+X_2}{2}$. Verificar que:

$$f_U(u) = (u+1)\, I_{(-1,0)}(u) + (1-u)\, I_{(0,1)}(u).$$

    (b) Sea $Z = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$. Usando 11.a verificar que:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{27}{16}(1-|z|)^2 & \text{si} \quad -1 < z < \frac{-1}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{3} < z < 1 \\ \frac{9}{8} - \frac{27}{8}z^2 & \text{si} \quad \frac{-1}{3} \leq z \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

    (c) Verificar que f_U es continua y que f_Z es derivable. (La convolución mejora la densidad).



12. Sea (X, Y) con función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{para } |x| < 1,\ 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

    (a) Hallar f_X, f_Y.

    (b) Determinar si X e Y son independientes.

    (c) Probar que $U = \dfrac{Y}{X^2}$ es $\mathcal{U}[0, 1]$.

13. Se elige un punto P al azar en el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1)$. Se trazan por P las paralelas a los ejes, que intersecan con el eje vertical en el punto P' y con la recta $Y = X$ en el punto P" determinando el trapecio 0P'PP".

    (a) Hallar la distribución del perímetro de trapecio.

    (b) Hallar la probabilidad de que dicho perímetro sea ≤ 1.

14. Tres integrantes de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas.
    El atleta A salta con distribución $\mathcal{U}[0,2]$.
    El atleta B salta según una distribución cuya función de densidad es:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) I_{[0,2]}(x).$$

    El atleta C salta según una distribución cuya función de densidad es:

$$f(x) = \frac{x}{2} I_{[0,2]}(x).$$

    (a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.

    (b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 1.2.

15. Un juego consiste en elegir un punto sobre una soga de 10 metros de longitud. Por jugar se pagan \$3 y se gana $\$|5 - X|$ donde X es el número elegido.

    (a) Hallar la distribución de la ganancia.

    (b) Supongamos que el juego se repite dos veces y se anota la mayor de las distancias al centro de la soga. Encontrar la distribución de la ganancia.

16. (a) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F. Se ordenan en orden creciente obteniéndose las variables aleatorias $X^{(1)} \leq \cdots \leq X^{(n)}$ que se denominan los estadísticos de orden de las variables aleatorias X_i. En particular:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \min_{1 \leq i \leq n} X_i \\ X^{(n)} &= \max_{1 \leq i \leq n} X_i \end{aligned}$$

    Obtener la función de distribución de $X^{(k)}$, $(1 \leq k \leq n)$.

    (b) Sea

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}.$$

    Obtener la distribución de $X^{(1)}$.

    (c) Sea

$$F(x) = \frac{x}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) + I_{(\theta,\infty)}(x) \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}_{>0}.$$

    Obtener la distribución de $X^{(n)}$.

17. Sean $X_1, \dots, X_n$ v. a. independientes con distribuciones exponenciales de parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivamente.

    (a) Mostrar que la distribución de $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ es exponencial.

(b) Probar que:

$$P\left(X_k = \min_{1\leq i\leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

Sugerencia: Ver que X_k y $\min_{i\neq k} X_i$ son independientes, y considerar el suceso $\left\{X_k \leq \min_{i\neq k} X_i\right\}$.

18. Sea X una v.a. con densidad $\varepsilon(\frac{1}{3})$. Sea $Y = [X] + 1$.

    (a) Hallar la función de probabilidad puntual o densidad de la v.a. Y según corresponda. Notar que tiene distribución conocida.

    (b) Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. independientes con la distribución obtenida en 18.a, hallar $P\left(\min_{1\leq i\leq n} Y_i \leq 2\right)$.
    Sugerencia: Usar ejercicio 17.a.

19. Dos dados equilibrados se tiran independientemente. Sean N_1 y M_1 la primera vez que se obtiene un 1 como resultado para el primero y segundo respectivamente. Hallar la distribución de $N = \max(N_1, M_1)$.

20. (*) Sea $Z \sim N(0,1), X_1 \sim \chi^2(n)$ y $X_2 \sim \chi^2(m)$, variables aleatorias independientes.

    (a) Probar que
    $$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}}$$
    tiene distribución t de Student con n grados de libertad con densidad dada por
    $$f_U(u) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

    (b) Probar que
    $$V = \frac{X_1/n}{X_2/m}$$
    tiene distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad con función de densidad
    $$f_V(v) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} v^{(n/2)-1} \left(1 + \frac{n}{m}v\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(v).$$