1. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias positivas independientes e idénticamentes distribuidas (i.i.d.). Demostrar que
$$E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

2. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes tales que:
$$P(X_k \le t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t^k & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n$$
   (a) Sea $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$. Hallar F_Y, f_Y, $E(Y)$.
   (b) Hallar $E(X_1 \cdots X_n)$.

3. Sean X_1 y X_2 v.a.i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$. Calcular $E(Y)$ y $E(Z)$ donde $Y = \min(X_1, X_2)$, $Z = \max(X_1, X_2)$. ¿Cuál de las dos debería ser menor?

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es:
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(3y + x) & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
   Hallar $E(X)$, $E(Y)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, $E(XY)$, $\text{cov}(X,Y)$, $\text{var}(X - Y)$, $\rho(X,Y)$.

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad uniforme en el pentágono de vértices $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$. Calcular $\text{cov}(X, Y)$.

6. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:
$$P(X \le \theta - h) = P(X \ge \theta + h) \qquad \forall h > 0$$
   (a) Si $E(|X|) < \infty$ y X es una v. a. absolutamente continua y simétrica respecto de m, probar que $E(X) = m$.
   (b) Se dice que una v. a. X tiene distribución logística si su densidad es
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
      i. Probar que X tiene distribución simétrica en torno a 0. Hallar la $E(X)$.
      ii. Hallar la densidad de $Y = e^X$ y su esperanza. ¿A qué familia de distribuciones pertenece?

7. Consideremos nuevamente el **Esquema de Polya** (ej. 6 prác. 2 y ej. 11 prác. 4): De un bolillero que contiene B bolillas blancas, $B \ge 1$ y R rojas, $R \ge 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \ge 2$, devolviendo cada bolilla extraida al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \ge 1$. Sean
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraida es roja} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraida es blanca} \end{cases}$$
   (a) Hallar $E(X_i)$, $\text{var}(X_i)$, $\text{cov}(X_i, X_j)$ y $\rho(X_i, X_j)$ para $i < j$..

(b) Sea $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ el número de bolillas rojas extraídas luego de j extracciones. Hallar $E(S_j)$, $\mathrm{var}(S_j)$, $\mathrm{cov}(S_i, S_j)$ y $\rho(S_i, S_j)$ para $i < j$.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, y sean $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ los estadísticos de orden.

   (a) Hallar la distribución de $X^{(i)}$.¿A qué familia pertenece?

   (b) Hallar $E\left(X^{(i)}\right)$. ¿Qué relación guardan las esperanzas entre sí?

   (c) Calcular $\mathrm{var}\left(X^{(i)}\right)$.

   (d) ¿Para qué valor de i se minimiza la varianza? ¿Para cuál se maximiza?

9. Diremos que (X, Y) es un vector aleatorio con distribución normal bivariada (o normal multivariada en $\mathbb{R}^2$), que denotaremos $\mathrm{N}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$ o $\mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, con $-1 < \rho < 1$, $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$,

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

cuando

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\},$$

o, matricialmente escrito, si $\mathbf{X} = (X, Y)$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\left[\det(\Sigma)\right]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t\, \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

   (a) Verificar que ambas definiciones de f_{XY} coinciden.

   (b) Notar que la matriz Σ resulta ser simétrica y definida positiva. Y que lo mismo vale para Σ^{-1}.

   (c) Graficar las curvas de nivel de la densidad conjunta. ¿Qué curvas son?

   (d) Hallar las distribuciones marginales de X e Y. Mostrar que $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

   (e) Deducir de 9.d las esperanzas y varianzas de X e Y.

   (f) Calcular $\mathrm{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

   (g) Probar que $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ es equivalente a que X e Y son independientes.

10. Sea $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ y W independiente de X tal que $P(W = 1) = P(W = 0) = \frac{1}{2}$. Definimos

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} X & \text{si } W = 1 \\ -X & \text{si } W = 0 \end{cases} \\ &= X I_{\{1\}}(W) - X I_{\{0\}}(W) \end{aligned}$$

   (a) ¿Son X e Y independientes?

   (b) ¿Son Y y W independientes?

   (c) Mostrar que $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

   (d) Mostrar que $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

11. (a) Probar la desigualdad de **Cauchy-Schwartz**. Es decir

$$[E(XY)]^2 \leq E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right). \tag{1}$$

Sugerencia: Excepto cuando $Y = -tX$, en cuyo caso la desigualdad anterior se convierte en igualdad, vale que para todo t

$$0 < E\left([tX+Y]^2\right) = E\left(t^2X^2 + 2tXY + Y^2\right). \tag{2}$$

Observar que (2) define un polinomio en t de grado dos sin raíces reales. Concluir que el discriminante de la ecuación cuadrática correspondiente es negativo. Deducir de ahí la desigualdad.

(b) Deducir de (1) o probar del mismo modo que en el ítem anterior pero a partir del cálculo de $\operatorname{var}(tX+Y)$ la siguiente desigualdad

$$[\operatorname{cov}(X,Y)]^2 \leq \operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y). \tag{3}$$

¿Qué relación deben cumplir X e Y para que valga la igualdad en (3)?

12. (a) Sea X una v.a. discreta, con $R_X = \mathbb{N}_0$, probar que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

(b) Sea X una v.a. cualquiera. Probar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

Concluir que

$$E(|X|) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty.$$

Sugerencia: Notar que $[\,|X|\,]$ (parte entera del módulo de X) es una variable aleatoria discreta y usar 12.a

13. Sea X una v. a. con distribución $F(x)$. Probar que:

(a) Si X es acotada, es decir $P(A \leq X \leq B) = 1$, entonces existe $E(X)$ y $A \leq E(X) \leq B$.

(b) En particular si $P(X \geq 0) = 1$, entonces $E(X) \geq 0$ y

$$E(X) = 0 \iff P(X = 0) = 1.$$

14. Sea X una v. a. con distribución $F(x)$.

(a) Si $E(|X|) < \infty$ entonces vale que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} xF(x) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Si $E(X^2) < \infty$ entonces

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[1 - F(x) + F(-x)] = 0.$$

Si X es una variable absolutamente continua, entonces

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} x[1 - F(x) + F(-x)]\,dx.$$

15. Sea X una v.a. tal que $E(X^2) < \infty$, entonces:

$$\begin{aligned} E[(X-c)^2] &< \infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \\ \operatorname{var}(X) &\leq E[(X-c)^2] \end{aligned}$$