

1. Hallar la función característica de las siguientes distribuciones:

- a) $\mathcal{P}(\lambda)$
- b) $\mathcal{Bi}(n, p)$
- c) $\mathcal{U}(a, b)$
- d) $\varepsilon(\lambda)$
- e) $\Gamma(n, \lambda)$.

Sugerencia: La distribución $\Gamma(n, \lambda)$ coincide con la de la suma de n variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

Calcular a partir de su función característica la esperanza y la varianza de cada una de ellas.

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Compruebe utilizando funciones características que

- a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1), Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \implies X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- b) $X \sim \mathcal{Bi}(n, p), Y \sim \mathcal{Bi}(m, p) \implies X + Y \sim \mathcal{Bi}(n + m, p)$.

3. Probar que una variable aleatoria X es simétrica respecto del origen si y sólo si $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ para todo t .

4. a) Calcular la función característica asociada a una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$.

Sugerencia: Utilizar la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}.$$

- b) Verificar que si X es una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ entonces $\phi_{2X} = \phi_X^2$. Observar que esto dice que ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$ aunque X e Y no sean independientes.
- c) Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$. Hallar para cada $n \in \mathbb{N}$ la distribución del promedio $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. ¿Contradican sus resultados algún teorema conocido?

5. Sea X una variable aleatoria con media cero y varianza finita tal que para cierta variable aleatoria $Y \sim X$ independiente de X se verifica que $X + Y$ y $X - Y$ son independientes.

- a) Probar que $\phi_X(t) = [\phi_X(\frac{t}{2})]^3 \phi_X(-\frac{t}{2})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deducir que si $\phi_X(t) \neq 0$ entonces

$$\frac{\phi_X(t)}{\phi_X(-t)} = \left[\frac{\phi_X(\frac{t}{2})}{\phi_X(-\frac{t}{2})} \right]^2 = \dots = \left[\frac{\phi_X(\frac{t}{2^n})}{\phi_X(-\frac{t}{2^n})} \right]^{2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- b) Probar que $\phi_X(t) = \phi_X(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deducir que $\phi_X(t) = [\phi_X(\frac{t}{2})]^4$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sugerencia: Estudiar el cociente $\frac{\phi_X(t)}{\phi_X(-t)}$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2 de ϕ_X en $t_0 = 0$.

- c) Concluir que $X \sim N(0, \sigma^2)$.
- d) Probar que el resultado sigue valiendo aún si la media de X es distinta de cero.

6. a) Sea $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sqrt{n}(\bar{Z}_n - \mu) \sim N(0, \sigma^2)$.

- b) Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 tal que para algún $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ se verifica que $\sqrt{n_0}(\bar{X}_{n_0} - \mu) \sim X_1 - \mu$. Probar que $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$.¹

7. Probar que no existen variables aleatorias X y Z independientes e idénticamente distribuidas tales que

$$X - Z \sim \mathcal{U}[-1, 1].$$

8. Probar mediante el estudio de funciones características que la distribución binomial de parámetros n y p converge en distribución cuando $n \rightarrow +\infty$ y $np \rightarrow \lambda > 0$ a la distribución de Poisson de parámetro λ .
9. Probar mediante el estudio de funciones características la ley débil de los grandes números para variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita sin asumir la finitud del segundo momento.
10. Sean $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aleatorias definidas para cada $n \in \mathbb{N}$ como $X_n = c_n Y_n$. Probar que:

- a) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| = c < +\infty$ entonces $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$ con $X \sim \mathcal{C}(0, 1)$.
- b) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| = +\infty$ entonces no existe ninguna variable aleatoria Z tal que $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$.
- c) Si $c_n = \frac{1}{n}$ entonces $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} 0$.
- Sugerencia:* Puede resultarle útil la desigualdad $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \log(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. a) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución dada por $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[-1, 1]$.

Sugerencia: Utilizar la identidad $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$.

- b) Sea $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro $\frac{1}{2}$. y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{2^k}.$$

Probar que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{U}[0, 1]$. Interpretar el resultado obtenido.

12. Sea $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios tal que para todo n las variables aleatorias X_n e Y_n son independientes y vale que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X' + Y'$, donde X' e Y' son independientes y tales que $X' \sim X$ e $Y' \sim Y$.
13. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z .

- a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

¹Observar que este resultado dice que la distribución normal es la única invariante por la estandarización correspondiente al Teorema del Límite Central. ¿Es razonable esto?

b) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2 . Mostrar que

$$n^\alpha(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $n^\alpha(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$ significa que para todo $M > 0$ se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|n^\alpha(\bar{X}_n - \mu)| \leq M) = 0$.
¿Qué sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$?²

14. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
15. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ para un determinado parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ y cierta variable aleatoria X .

a) Probar que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en μ entonces $a_n(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} g'(\mu)X$.

Sugerencia: Observar que para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos la escritura

$$g(x) = g(\mu) + (g'(\mu) + T(x))(x - \mu)$$

donde $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $T(\mu) = 0$.

b) Probar que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con derivada segunda en μ y tal que $g'(\mu) = 0$ entonces $a_n^2(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{g''(\mu)}{2}X^2$.

16. Sean $X_1, \dots, X_{100}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} 1_{(1, \infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\right)$.

Sugerencia: Hallar la distribución de $\log X$.

17. Rehacer los ejercicios 1 y 2 de la práctica 8 utilizando el Teorema del Límite Central: pero donde se pide acotar la probabilidad, calcularla de manera aproximada. Comparar con las cotas obtenidas a partir de la desigualdad de Tchebychev.
18. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F . Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria³⁴

$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i \leq t\}}{n}.$$

a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

b) Mostrar que $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, F(t)(1 - F(t)))$.

² Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el caso de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

³ Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

⁴ A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F . Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.

19. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0, \theta]$ para cierto $\theta > 0$. Probar que $\sqrt{n}(\ln(2\bar{X}_n) - \ln(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 3^{-1})$.
20. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad W_n = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2,$$

hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

21. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ . Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \lambda^2)$.
22. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m , respectivamente.

a) Probar que

$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1) \quad \text{cuando } n, m \rightarrow +\infty.$$

b) Probar que

$$\frac{(X_n - n) - (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1) \quad \text{cuando } n, m \rightarrow +\infty.$$

23. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}-1} 1_{(1, +\infty)}(x)$$

para cierto $0 < \alpha < 1$.

a) Hallar el límite de

$$Y_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k}.$$

¿En qué sentidos puede garantizar esta convergencia? No analizar convergencia en L^p .

b) Probar que

$$Z_n = \frac{\sqrt{n} \left(\log \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k} - \alpha \right)}{\sqrt{\log \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_k}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, \alpha).$$

- c) Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$. Probar que

$$W_n = \frac{1}{\alpha_n} \left[\left(\frac{\sqrt{n}(\log R_n - \alpha)}{\sqrt{\log R_n}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{n}(\log T_n - \alpha)}{\sqrt{\log T_n}} \right)^2 \right] \xrightarrow{\mathcal{D}} W \sim \chi^2(2).$$

donde

$$R_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_{2k-1}} \quad \text{y} \quad T_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n X_{2k}}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.