Temas de Física

Primer Cuatrimestre de 2004

Trabajo práctico: Osciladores y resonancia

1 Oscilador Armónico. Resonancia pura

Tenemos un dispositivo consistente en una masa unida a un resorte, éste último sujeto a una pared por el otro extremo. A la constante k del resorte la notaremos como $k = m.\omega_0^2$, de este modo la ecuación del movimiento se reduce a

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

en el caso en que no haya ninguna fuerza actuando sobre la masa más que la del resorte. Ahora si consideramos que sobre la masa también actúa una fuerza $F(t)$ la ecuación se transforma en

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \tag{2}$$

Si en particular la fuerza $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ (una fuerza sinusoidal en el tiempo con frecuencia ω y amplitud máxima F_0), se verifica que si $\omega = \omega_0$ entonces el sistema entra en **resonancia pura.**

1. Resuelva analíticamente las ecuaciones (1) y (2).
2. Mediante el uso de algún programa fomal (como Maple, Mathematica o algún otro) o numérico (Matlab, Octave...pero aquí hay que discretizar la ecuación) grafique las curvas solución de la ecuación (2) en los casos en que los parámetros tomen los siguientes valores:
   (a) $m = 1$, $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = \pi$, y $0 \leq t \leq 4$
   (b) $m = 1$, $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 4\pi$, y $0 \leq t \leq 4$
   (c) $m = 1$, $F_0 = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 2\pi$, y $0 \leq t \leq 4$
3. Anime los gráficos de las curvas solución dejando fijo los parámetros m, F_0 y ω_0 (puede ser en algunos de los valores propuestos en el ítem anterior) haciendo crecer ω. Fije un lapso de tiempo razonable.

2 Oscilador Amortiguado. Resonancia.

Cuando además del sistema oscilador tenemos un amortiguador actuando con constante de amortiguación $\alpha = 2m\mu$, tenemos que la ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

Si además sobre la masa actúa una fuerza externa $F(t)$ la ecuación será

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \tag{4}$$

En particular consideraremos una fuerza $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ (sinusoidal en el tiempo con frecuencia ω y amplitud máxima F_0).

1. Resuelva analíticamente las ecuaciones (3) y (4). En el segundo caso hallar el valor de ω, de la fuerza que se aplica, que maximiza la amplitud de la solución. A este valor de ω lo llamaremos ω_1, y decimos que $\frac{\omega_1}{2\pi}$ es la **frecuencia de resonancia**. (Respuesta: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}$)

2. Nuevamente trabajando con máquina, grafique las curvas solución de la ecuación (4) en los casos en que los parámetros tomen los siguientes valores: (siempre $m = 1$ y $F_0 = 1$)

   (a) $\mu = \pi$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = \pi$, y $0 \le t \le 4$
   (b) $\mu = 2\pi$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = \pi$, y $0 \le t \le 4$
   (c) $\mu = 3\pi$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = \pi$, y $0 \le t \le 4$
   (d) $\mu = \pi$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 4\pi$, y $0 \le t \le 4$
   (e) $\mu = 2\pi$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 4\pi$, y $0 \le t \le 4$
   (f) $\mu = 3\pi$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 4\pi$, y $0 \le t \le 4$
   (g) Dé un valor de μ y ω_0, determine en este caso la frecuencia ω de resonancia. Grafique.

3. Anime los gráficos de las curvas solución dejando fijo los parámetros m, F_0, μ y ω_0 (puede usar algunos de los valores propuestos en el ítem anterior) haciendo crecer ω. Fije un lapso de tiempo razonable.

4. Cuando $F_0 = 2, m = 1, \omega_0 = 4$ la solución particular de la ecuación (4) con $F(t) = 2\sin(\omega t)$ (régimen permanente del sistema) es

$$x_p(t) = g_\mu(\omega)\sin(\omega t + \theta)$$

   donde θ es el ángulo que cumple

$$\sin\theta = \frac{-2\mu\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

   y la función g_μ es para cada μ fijo

$$g_\mu(\omega) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}}$$

   El valor ω_1 de la constante que determina la frecuencia de resonancia es el valor de ω donde se maximiza la función $g_\mu(\omega)$.

   (a) Forme una tabla de valores de $(\omega_1, g_\mu(\omega_1))$ correspondientes a $\mu = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{3}{8}$, $\mu = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{1}{8}$.
   (b) En un mismo gráfico trace $g_1, g_{\frac{1}{2}}, \ldots, g_{\frac{1}{8}}$ (curvas de resonancia o curvas de respuesta a la frecuencia). ¿Hacia dónde tiende ω_1 cuando $\mu \to 0$?. ¿Qué sucede con las curvas de resonancia cuando $\mu \to 0$?.