Temas de Física

Primer Cuatrimestre de 2004

Práctica 0
Preliminares Algebraicos (¿o geométricos?)

Esta práctica quiere ser un resumen de diversos resultados más o menos conocidos. Por supuesto que esta escasa lista no agota todos lo que necesitaremos, pero por algo se comienza...

1 Operador Adjunto

Definición: Si T es un operador lineal en $\mathbb{C}^m$ (respectivamente $\mathbb{R}^m$), notamos con T^* al adjunto de T el cual es el único operador que cumple $\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^* y\rangle$ para todo x e $y \in \mathbb{C}^m$.

Observación: Si B es una base ortonormal de $\mathbb{C}^m$ (o el caso real $\mathbb{R}^m$) entonces la matriz de $M_B(T^*) = \overline{(M_B(T))^t}$ (en el caso real $M_B(T^*) = (M_B(T))^t$).

Ejercicio 1 Probar las siguientes relaciones

1. $N(T) = R(T^*)^{\perp}$
2. $R(T^*) \subseteq (N(T))^{\perp}$. En realidad en dimensión finita (como es nuestro caso) vale la igualdad.

Ejercicio 2 En dimensión finita valen las igualdades $N(T^*T) = N(T)$ y $R(T^*T) = R(T)^{\perp}$. Concluir que los rangos de T y de T^*T coinciden.

Ejercicio 3 Si T es inyectiva entonces T^*T es hermítica y definida positiva (por lo tanto T^*T determinan una métrica).

Ejercicio 4 Probar que la matriz asociada a T^*T es diagonal si y sólo si T preserva ángulos.

2 Operadores unitarios y ortogonales

Definición: Un operador lineal T en $\mathbb{C}^m$ se dice unitario (u ortogonal, en el caso $\mathbb{R}^m$) sii para todo x e $y \in \mathbb{C}^m$ (respectivamente $\mathbb{R}^m$) se cumple que $\langle Tx; Ty\rangle = \langle x; y\rangle$.

Observación: De la definición es inmediato que un operador unitario (ortogonal) al conservar el producto interno, conserva la longitud de los vectores y los ángulos entre ellos.

Ejercicio 5 Si T es un operador en $\mathbb{C}^m$ tal que para todo $x \in \mathbb{C}^m$ se verifica que $\|Tx\| = \|x\|$ (conserva la longitud de los vectores, o lo que es lo mismo, es una isometría) entonces es un operador unitario.

1. Si T es una transformación unitaria en $\mathbb{C}^m$ transforma cualquier base ortonormal en otra base ortonomal.

2. Pruebe que las columnas de $U = M_B(T)$ forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^m$.

3. La recíproca de (1) también se verifica: si un operador T transforma una base ortonormal en otra ortonormal, entonces esta T es unitaria.

Ejercicio 6 Sea T es una transformación unitaria en $\mathbb{C}^m$(u ortogonal en $\mathbb{R}^m$) y $U = M_B(T)$

1. $T^* = T^{-1}$. Por lo tanto, toda aplicación unitaria (ortogonal) es inversible.

2. T^{-1} es también unitaria (ortogonal).

3. $U^{-1} = \overline{U^t}$ (en el caso real $U^{-1} = U^t$). Usando esto pruebe que las filas de la matriz U forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^m$.

Ejercicio 7 Propiedades de las matrices unitarias.

1. Su determinante es un número complejo de módulo 1.

2. Preservan la forma de volumen (es consecuencia del ítem anterior).

3. Preservan el elemento de área de cualquier superficie sumergida.

4. Analizar, para el caso real $\mathbb{R}^3$, bajo qué condiciones distribuyen el producto vectorial, es decir, dar condiciones para que sea válida la igualdad:

$$U(a \wedge b) = Ua \wedge Ub$$

5. Sus autovalores tienen módulo 1.

6. Los autoespacios asociados a autovalores distintos son ortogonales.

7. Son $\mathbb{C}-$diagonalizables (en general no son $\mathbb{R}-$diagonalizables).

3 Rotaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 8 Verificar que una rotación en $\mathbb{R}^2$ es un operador ortogonal, cuya matriz asociada en base canónica es $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (para algún ángulo $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Ejercicio 9 La rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo φ alrededor del eje z tiene por matriz asociada en base canónica a $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si gira alrededor del eje x la matriz es $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Verificar que en todos los casos U es una matriz ortogonal.

Si la rotación es entorno de una recta distinta a todas los ejes coordenados, ¿cuál es la expresión de la matriz asociada? (conviene encontrar la matriz asociada a una base de autovectores)

Ejercicio 10 En el ejercicio anterior vimos la dificultad de expresar una rotación entorno de un eje cualquiera en términos de la base canónica. Si llamamos $R(x)$ a la rotación de ángulo φ entorno de la recta generada por w, con $\|w\| = 1$, verifique que podemos describirla con la siguiente fórmula

$$R(x) = \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)(w \wedge x) + (1 - \cos(\varphi))\langle w, x\rangle w$$

Sugerencia: En primer lugar considere el caso en que $\langle w, x\rangle = 0$, y luego vea el caso general.

4 Operadores antisimétricos

Definición: Un operador T se dice antisimétrico sii $T^* = -T$. Si A es la matriz asociada a T en base canónica tenemos que en el caso complejo $\overline{A^t} = -A$, y en el caso real $A^t = -A$.

Ejercicio 11 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antisimétrico no nulo, probar que:

1) $T(v) \perp v$
2) $R(T) \perp N(T)$
3) $\dim N(T) = 1$

Concluir que:

1. 0 es un autovalor de A. Llamemos w a un autovector asociado.
2. Para cada $v \in \mathbb{R}^3$ existe un escalar $\lambda = \lambda(v)$ tal que: $T(v) = \lambda(v)\, w \wedge v$.

3. El escalar anterior es único, o sea, existe único $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$ tal que: $T(v) = \lambda\, w \wedge v$

4. Existe $u \in \mathbb{R}^3, u \neq 0$ tal que: $T(v) = u \wedge v.$

Ejercicio 12 Probar que para cada $0 \neq \omega \in \mathbb{R}^3$ el operador $A_\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por: $A_\omega(v) = \omega \wedge v$ es lineal.

1. Verificar que su matriz en base canónica es

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

   que resulta antisimétrica.

2. Verificar que $N(A_\omega) = \mathrm{gen}\{\omega\}$ y $R(A_\omega) = \omega^\perp$.

3. Verificar que $A_\omega |_{R(A_\omega)}$ es una rotación seguida de una homotecia ¿cuál es el ángulo? ¿y el escalar?

Ejercicio 13 La intención de este ejercicio es mostrar que el rango de una matriz antisimétrica es par.

1. Probar que en dimensión impar las matrices antisimétricas **no** son inversibles. Sugerencia: usar la definición y calcular el determinante.

2. Verificar que $R(A)$ es un subespacio invariante por A y concluir que la restricción $A|_{R(A)}$ es un automorfismo de $R(A)$.

3. Probar que la restricción $A|_{R(A)}$ es antisimétrica y concluir que la dimensión de $R(A)$ es par.

Ejercicio 14 Sea $\omega \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\omega\| = 1$, entonces

$$e^{\theta A_\omega} = \omega\omega^t + \cos\theta(I - \omega\omega^t) + \sin\theta A_\omega$$

es una matriz que representa una rotación en un ángulo θ según el eje generado por ω.

Sugerencia: Use el ejercicio (10) y el (12)