Temas de Física

Primer Cuatrimestre de 2004

Práctica 2 (Primera parte): Cinemática

1 La geometría del movimiento de una partícula.

Coordenadas polares en el plano. Sea $\Phi : (r, \theta) \to (x, y)$ el cambio de coordenadas polares a cartesianas.

Ejercicio 1 *Verificar que $D\Phi^* \, D\Phi$ es una matriz diagonal, concluir que las columnas de $D\Phi$ son ortogonales. Llamaremos $\widehat{r}$, $\widehat{\theta}$ a los vectores que se obtienen de normalizar las columnas de $D\Phi$.*

1. *Hallar las coordenadas cartesianas de $\widehat{r}$, $\widehat{\theta}$.*

2. *Hallar $\dot{\widehat{r}}$, $\dot{\widehat{\theta}}$, $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$ en función de $\widehat{r}$, $\widehat{\theta}$.*

3. *Hallar el elemento de arco (de las coordenadas polares) ds sabiendo que*

$$ds^2 = (dr \; d\theta) \; D\Phi^* \; D\Phi \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 *Expresar en coordenadas polares las siguientes curvas:*

1. *Una parábola con foco en el origen.*

2. *Una elipse con un foco en el origen.*

3. *Una elipse con centro en el origen.*

4. *Una hipérbola con un foco en el origen.*

Nota*: medir los ángulos respecto del eje de simetría que pasa por el foco.*

Ejercicio 3 *Consideremos una curva plana $\mathcal{C}$ descripta en coordenadas polares por la fórmula $r = r(\theta)$ y llamemos α al ángulo que forma el radio vector $\vec{r}$ con el vector velocidad $\dot{\vec{r}}$.*

1. *Probar que $\dfrac{dr}{d\theta} = r.\cot(\alpha)$. Concluir que si α es constante la curva es una espiral, analizar los casos: $\cot(\alpha) > 0$, $\cot(\alpha) < 0$, $\cot(\alpha) = 0$.*

2. *Usando que el versor tangente $\widehat{T}$ satisface $\widehat{T} = \cos(\alpha)\,\widehat{r} + \sin(\alpha)\,\widehat{\theta}$ hallar la curvatura de $\mathcal{C}$ en función de $\widehat{r}$, $\widehat{\theta}, r, \theta, \alpha$.*

   Ayudita*:*

$$\vec{\kappa} = \frac{\frac{d\alpha}{d\theta} + 1}{r} \cdot (\sin(\alpha)) \cdot \{-\sin(\alpha)\,\widehat{r} + \cos(\alpha)\,\widehat{\theta}\}$$

3. *Interpretar la ecuación anterior en los siguientes casos: $\mathcal{C}$ es una recta, $\mathcal{C}$ es una circunferencia de radio R centrada en el origen.*

Ejercicio 4 *Repetir el ejercicio (1) para obtener la expresión de la aceleración en las coordenadas cilíndricas y esféricas. Dada la utilidad de las mismas, las dejo expresadas aquí.*

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\widehat{r} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\widehat{\theta} + \ddot{z}\,\widehat{z}$$

Coordenadas esféricas *en* R^3, (r, θ, ϕ):

$$\begin{aligned}
\langle \ddot{\overrightarrow{r}}\,; \widehat{r}\rangle &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\sin^2(\theta)\,\dot{\phi}^2 \\
\langle \ddot{\overrightarrow{r}}\,; \widehat{\theta}\rangle &= 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,\dot{\phi}^2 \\
\langle \ddot{\overrightarrow{r}}\,; \widehat{\phi}\rangle &= 2\,\dot{r}\,\sin(\theta)\,\dot{\phi} + 2\,r\,\dot{\theta}\cos(\theta)\,\dot{\phi} + r\,\sin(\theta)\,\ddot{\phi}
\end{aligned}$$

Donde θ es el ángulo que forman el eje Z con el radio vector y ϕ (ángulo polar) es el ángulo que forman el eje X con la proyección del radio vector sobre el plano XY (ángulo ecuatorial)

Ejercicio 5 *Hallar la curvatura de la hélice $x(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ ¿Qué ocurre?*

Ejercicio 6 *Para una partícula que recorre el gráfico de una función $y = y(x)$ hallar*

1. *El versor tangente y el versor normal*

2. *Las componentes cartesianas de la aceleración y las componentes tangente y normal de la misma.*

2 Dinámica del movimiento

Estos ejercicios serán retomados cuando veamos la formulación Lagrangiana.

Ejercicio 7 *Hallar las ecuaciones de movimiento de una partícula m que se mueve sobre la superficie de un cilindro, de eje vertical y de radio R, por la acción de la gravedad.*

1. *¿Cuáles son las fuerzas de vínculo? ¿Cuál es el trabajo que éstas realizan? ¿Por qué?*

2. *¿Cuál es el sistema de coordenadas que conviene utilizar? Una vez obtenidas las ecuaciones ¿qué coordenada no aparece? Este problema ¿tiene alguna simetría?.*

3. *¿Cuáles son los posibles valores del vector velocidad inicial? Describir cualitativamente el movimiento para cada uno de ellos y, ya que llegamos hasta acá, resolver la ecuación de movimiento.*

Ejercicio 8 *Una canaleta de sección cilíndrica yace sobre un plano horizontal, sobre un punto cualquiera de ella se apoya una bolita de masa m y en el instante $t = 0$ se la suelta.*

1. *Repetir todas las preguntas del problema anterior y hacerse más preguntas!*

2. *Hallar las ecuaciones que describen el movimiento de la bolita para $t > 0$ en función de la posición inicial. Hacer las estimaciones convenientes para resolver algún caso.*

3. *¿Qué ocurre si la velocidad inicial es v? Analizar las diferentes posiciones que puede tomar v.*

4. *¿Qué ocurre si el plano tiene una inclinación β respecto de la horizontal?*

Ejercicio 9 *Hallar las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula que cae por efecto del campo gravitatorio, sabiendo que el movimiento se realiza sobre un cono de eje vertical y abertura β. ¿Cuál es el sistema de coordenadas que conviene elegir?*

Ejercicio 10 *Plantear las ecuaciones de Newton para un péndulo de masa m y longitud l.*

1. *¿Qué magnitudes se conservan? ¿de qué dependen las fuerzas netas?*

2. *Hallar la energía y ver que depende de la masa y de la longitud del hilo. Analizar cualitativamente el movimiento para distintos niveles de energía.*

3. *Suponiendo que en el instante inicial $\dot{\theta} = 0$ y $E = E_0$ encontrar la amplitud . ¿Es necesario resolver la ecuación de movimiento? ¿Es necesario asumir pequeñas oscilaciones?*

4. *Suponiendo que en el instante inicial la masa está en reposo en $\theta(0) = \theta_0$ hallar la energía del sistema. En la ecuación anterior, despejar $dt = G(d\theta)$, esto permite obtener el período, ¡siempre que podamos integrar! Ahora sí, suponer pequeñas oscilaciones y encontrar el período.*