

«...afirmo que el movimiento (kineseis) es la actualización (energeia) de lo que está en potencia (dynamis), en tanto que tal», ARISTÓTELES (384 a.c.-322 a.c.) *Metafísica*, XI 9, 1065b16-17

Temas de Física

Primer Cuatrimestre de 2004

Práctica 3: Dinámica

1 Dinámica unidimensional

El tipo de problemas que intentaremos abordar es el de una partícula que se mueve en una recta (o en una curva parametrizada con el parámetro x), siendo ésta (la recta o la curva) la única dirección del movimiento.

La ecuación será entonces:

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}).$$

La intención es analizar algunos casos especiales.

1.1 Fuerzas que sólo dependen del tiempo

Ejercicio 1 Resolver la ecuación de movimiento para un móvil de masa m en cada uno de los siguientes casos:

1. $f(t) = a$.
2. $f(t) = a m \chi_{[0;1]}$ ¿Cómo es la velocidad para $t > 1$?
3. $f(t) = a m k \chi_{[0; k^{-1}]}$ Hacer un gráfico de la velocidad como función del tiempo, discutir el caso $k \rightarrow \infty$ e interpretar los resultados.
4. $f(t) = \sin(k\pi t) \cdot \chi_{[0;1]}$ donde $k = 1, 2$. Hallar la velocidad final en cada caso.

Ejercicio 2 Hallar el trabajo que realiza cada una de las fuerzas del ejercicio anterior para mover la partícula desde $x(0)$ hasta $x(1)$.

Ejercicio 3 Imaginemos el siguiente experimento: en $t = 0$, una partícula parte del origen y del reposo bajo la acción de una fuerza f , de manera que en $t = T$ se encuentra en la posición $x_0 = x(T)$ con velocidad $v = \dot{x}(T)$.

Supongamos ahora que repetimos el experimento con dos partículas de manera que, en $t = 0$: la primera, como en el experimento anterior, parte del reposo y del origen pero la segunda partícula lo hace de la posición x_0 con velocidad v .

¿Es cierto que la posición de la segunda partícula para $s > 0$ es la misma que la de la primera para $s + T$?

Investigar la respuesta con las fuerzas del ejercicio 1.

1.2 Fuerzas que sólo dependen de la posición

La ventaja adicional que ofrece la mecánica unidimensional para el caso $f = f(x)$, es la existencia de una función U , llamada potencial, que verifica

$$f(x) = -\frac{dU}{dx}(x).$$

Ejercicio 4 Consideremos los siguientes potenciales:

a) $U(x) = kx^2$ b) $U(x) = -\frac{1}{|x|}$

c) $U(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|}$ d) $U(x) = (1 - x^2).e^{-x^2}$

e) $U(x) = (x^2 - 1).e^{-x^2}$ f) $U(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 2x^2 & x < 0 \end{cases}$

1. Hallar la energía mecánica total $E = E(x, \dot{x})$ y describir cualitativamente las posibles trayectorias para los distintos valores de E .
2. En función de lo hecho en el ítem anterior trazar algunas curvas de nivel de E , indicando: puntos de equilibrio, trayectorias acotadas, trayectorias periódicas, observar las simetrías tanto en x como en $\dot{x}$.
3. Las trayectorias acotadas: ¿son siempre periódicas? ¿admiten siempre una “velocidad de escape”? ¿qué relación existe entre la velocidad de escape y las curvas de nivel de E ?
4. Para cada uno de los puntos de equilibrio detectados:
 - (a) Analizar el comportamiento de las trayectorias que comienzan “cerca”. Esto significa analizar la “estabilidad” del punto de equilibrio.
 - (b) Relacionar el comportamiento del punto de equilibrio con la clasificación de éste como punto crítico de U . Rta: Los mínimos de U son “estables” y los máximos de U son “inestables”
 - (c) Calcular ∇E y verificar que los puntos críticos de E son de la forma $(a, 0)$ donde a es un punto crítico de U . Clasificar los puntos críticos de E en función de la clasificación de los de U y observar que E no puede tener máximos.

Ejercicio 5 Consideremos el siguiente potencial

$$U(x) = \begin{cases} L_1 & |x| \leq M_1 \\ L_2 & M_1 < |x| < M_2 \\ L_3 & |x| \geq M_3 \end{cases}$$

Verificar que en el interior de cada intervalo el movimiento es el de una partícula libre. Describir el movimiento para distintos valores de los parámetros: un caso interesante es tomar $L_3 < L_1 < L_2$ y $M_2 \ll 1$; en tal caso encontrar la energía que necesita una partícula para pasar la barrera, para el valor de energía hallado calcular el tiempo que tarda en cruzarla.

Ejercicio 6 Continuación del ejercicio 3 del caso 1.

En este caso las fuerzas conservativas no dependen explícitamente de la variable temporal, este hecho tiene consecuencias importantes que debemos poner de manifiesto. En líneas generales cuando una variable no aparece explícitamente en la formulación del problema, suele deberse a las simetrías que el problema tiene respecto de la misma, simetrías que son aprovechadas para obtener cantidades que se conservan. Veamos que en este caso la respuesta a la pregunta del citado ejercicio es verdadera.

Sea $x(t)$ la única trayectoria que pasa por $x(0)$ con velocidad $\dot{x}(0)$ y sea T un instante cualquiera.

1. Llamemos $y(s)$ a la única trayectoria que verifica $y(0) = x(T)$, $\dot{y}(0) = \dot{x}(T)$. Verificar que $y(s) = x(s + T)$. Observar que sólo se utiliza que la fuerza no depende explícitamente del tiempo, o sea $f = f(x, \dot{x})$. Esto muestra que la descripción del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza independiente (explícitamente) del tiempo es insensible a los cambios de origen en la escala temporal. Relacionar con lo anteriormente expuesto.
2. Siguiendo el análisis del ítem anterior verificar que: $y(-T) = x(0)$, $\dot{y}(-T) = \dot{x}(0)$. Llamemos $w(t)$ a la curva que se obtiene recorriendo y al revés, o sea: $w(t) = y(-t)$. Suponiendo que $f = f(x)$ verificar que w es una trayectoria de f y concluir que no es posible distinguir la partícula que “avanza” y de la que “retrocede” w .

1.3 Fuerzas que sólo dependen de la velocidad

Los modelos básicos son:

a) $f(\dot{x}) = -\mu\dot{x}$ b) $f(\dot{x}) = -\mu\dot{x}^2$

Ejercicio 7 Para cada uno de los modelos anteriores:

1. Resolver la ecuación de movimiento.
2. Hallar la velocidad y la posición final.
3. Hallar el impulso total $I = \int_0^{+\infty} f(\dot{x}(t)) dt$ ¿cuánto debe dar?
4. Hallar el trabajo realizado por la fuerza para mover a la partícula desde la posición inicial hasta la posición final

$$W = \int_{x_0}^{x_1} f(\dot{x}(x)) dx$$

¿Cuánto debe dar?

2 Resortes

2.1 Oscilador armónico

Ejercicio 8 Plantear y resolver las ecuaciones de Newton para una masa m sujeta a un resorte horizontal de constante elástica k . ¿En qué unidades se mide k ?

1. Hallar la energía $E = E(x, \dot{x})$ y verificar que las curvas de nivel son elipses, y que el único punto de equilibrio es el origen.
 - (a) Concluir que todas las trayectorias son periódicas.
 - (b) A partir del ítem anterior, concluir que el origen es un punto de equilibrio estable.
2. Hallar la frecuencia de oscilación y la amplitud.
3. Mostrar que toda solución puede escribirse como:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

¿Qué significado físico tienen A, ω ? Ayuda, ϕ es el “ángulo de fase”.

Calcular A, ω, ϕ a partir de los datos iniciales.

Ejercicio 9 Una masa m cuelga de un resorte vertical de constante k , plantear las ecuaciones de Newton. Observar que la fuerza neta es equivalente a la de un resorte de idéntica constante pero de diferente posición de equilibrio, observar además que la diferencia entre las posiciones de equilibrio del resorte “vacío” y del resorte “cargado” es directamente proporcional a la masa. Analizar las aplicaciones prácticas de este hecho.

Ejercicio 10 Entre dos planos horizontales separados a una distancia H se encuentran dos resortes unidos a una masa m . Hallar

1. La ecuación de movimiento de la masa m .
2. La solución de la ecuación si la masa es dejada inicialmente en reposo a una altura d del plano inferior ($d < H$).
3. Los puntos extremos del movimiento y la rapidez máxima. ¿Es forzoso hallar la ecuación de movimiento?

2.2 Oscilador amortiguado y oscilador forzado.

Ejercicio 11 Describir cualitativamente las soluciones de un oscilador amortiguado de constantes (positivas): k, m, μ , para los distintos valores de los parámetros.

Hallar la frecuencia de oscilación en el caso que corresponda. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar μ para que la frecuencia sea infinita (o sea, no haya oscilación)?

Verificar que todas las soluciones de la ecuación tienden (exponencialmente) a cero en el futuro, por tal motivo suelen llamarse transitorias.

Ejercicio 12 La ecuación del oscilador forzado es un ejemplo especial de ecuación lineal a coeficientes constantes, no homogénea (de orden 2):

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = f$$

En tal caso se sabe que la solución puede escribirse $x = x_p + h$ donde x_p es una solución particular de la **ecuación** (no del problema) y h es la solución de la ecuación homogénea que permite ajustar los datos iniciales.

A modo de ejemplo considerar un forzante $f(t) = t$, hallar una solución particular y verificar que, en el futuro, el comportamiento de la solución del problema es el de la solución particular. Mostrar que el comportamiento no cambia si elegimos otra solución particular. **En tal caso** la solución particular se llama estado estacionario. Notar que esto deja de tener sentido si la solución particular tiende a cero en el futuro con el orden (exponencial) de la solución homogénea, como es el caso del forzante $f(t) = e^{-3t}$ con la solución particular $\frac{1}{2}e^{-3t}$ en la ecuación

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = f(t)$$

Para el problema de la resonancia debemos tener presente dos cuestiones claves, a saber:

1. ¿Porqué considerar forzantes periódicos **sinusoidales**?
2. ¿Cómo esperamos que sea el movimiento cuando el forzante es periódico?

La primer pregunta está relacionada con la posibilidad de desarrollar cualquier forzante periódico en series de Fourier (de senos) y superponer los resultados obtenidos en cada caso.

La segunda cuestión es más delicada y tiene que ver con el hecho de esperar un comportamiento periódico cuya frecuencia sea la del forzante (una vez que haya desaparecido el término transitorio dado por la solución homogénea).

¿Por qué es razonable esperar esto?

!La simetría temporal frente a desplazamientos temporales de la longitud del período!

Esto es, si $x(t)$ es una solución particular (**de la ecuación**) entonces $x(t + T)$ también es solución de la ecuación, en tal caso la diferencia entre ambas es una solución del homogéneo y ya hemos visto que éstas son transitorias, de modo que en el futuro esta diferencia es “nula”.

¿Por qué este argumento falla para el oscilador libre $f(t) = 0$?

¿Por qué **debe** fallar?

Pensando al caso armónico $\mu = 0$ como límite de amortiguaciones que tienden a cero $\mu \rightarrow 0$ podemos aplicar este argumento al oscilador armónico.

Ejercicio 13 Ahora sí consideremos un forzante periódico sinusoidal $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$.

1. Podremos proponer una solución particular de la forma $x_p = A(\omega) \sin(\omega t + \phi)$.

Falta aún encontrar $A(\omega)$ y ϕ .

2. Verificar que si $\mu = 0$ entonces $\lim_{\omega \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}} A(\omega) = \infty$.

Notar que $\sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia del oscilador libre. Este fenómeno se conoce como “resonancia”.

3. Para $\mu \neq 0$ verificar que $A(\omega)$ está acotada y hallar la frecuencia $\omega_0 = \omega_0(m, k, \mu)$ para la cual A es máxima. En tal caso diremos que ω_0 es la frecuencia de resonancia.