

La tierra, que es semejante a una pelota, no tiene ningún punto de apoyo..., OVIDIO (43 a. C.- 17 d. C.) *Fastos*, VI 268-269.

Temas de Física  
Primer Cuatrimestre de 2004  
Práctica 4: Campo gravitatorio. Fuerzas no conservativas

## 1 Campo gravitatorio

**Ejercicio 1** *Escribir las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa  $m$  sometida al campo gravitatorio terrestre y observar que no dependen de la masa de la partícula.*

1. *Probar que siempre podemos pensar que el movimiento se realiza en un plano.*
2. *Resolver el caso  $\dot{r} = 0$ , en coordenadas polares, o sea, el movimiento (plano) de un satélite.*

(a) *Mostrar que la velocidad angular es constante. Verificar la 3ª ley de Kepler: “El cuadrado de la frecuencia es inversamente proporcional al cubo del radio”. Leemos al amigo J. Kepler, Armonices Mundi Libri V (V, 3), Proportio quae est inter binorum quorumcumque Planetarum tempora periodica sit praecise **sesquialtera** proportionis mediarum distantiarum*

(b) *Hallar el período y la velocidad tangencial de un satélite que orbite a nivel del mar, a 100km de la superficie y a la distancia de la Luna.*

(c) *¿Cuál debe ser la altura a la que debe orbitar un satélite para que el período sea de un día? ¿Qué pasa si el plano de la órbita contiene al ecuador terrestre?*

3. *Resolver el caso  $\dot{\theta} = 0$ , en coordenadas polares, o sea, un movimiento radial.*

(a) *Describir cualitativamente el movimiento para cada valor de la velocidad inicial  $v$ .*

(b) *Hallar la altura máxima alcanzada en función de  $v$ . ¿Cuál debe ser la velocidad inicial mínima necesaria para que el alcance máximo sea infinito? Esta velocidad se llama velocidad de escape.*

*Datos:*

*Constante de gravitación:  $6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$*

*Masa de la Tierra:  $5.98 \times 10^{24} kg$*

*Radio de la Tierra: 6400km*

*Distancia Luna-Tierra: 384000km*

**Ejercicio 2** *Sean  $M$  y  $m$  dos masas esféricas (uniformes) de radios  $R$  y  $r$ . Supongamos que se encuentran separadas por una distancia  $D \gg R + r$  y que están en reposo.*

1. Hallar el potencial gravitatorio que engendran.
2. Una masa de prueba se encuentra en reposo en el centro de masas del sistema formado por  $m$  y  $M$  ¿está en equilibrio?
3. En el segmento que une los centros de las esferas ¿dónde debe situarse una partícula para permanecer en reposo? Nota: los puntos donde el campo es nulo se llaman estacionarios o de equilibrio.
4. Una partícula sale del punto de  $M$  más cercano a  $m$  y se mueve con la dirección y el sentido del segmento  $Mm$  describir cualitativamente todas las trayectorias posibles en función de la velocidad inicial  $v$ .
  - (a) ¿Cuál es la velocidad inicial mínima que permite llegar al punto estacionario ¿es un mínimo?. Una partícula que salga con esa velocidad ¿cuánto tarda en llegar?
  - (b) ¿Cuál es la velocidad mínima necesaria para llegar a  $m$ ? ¿Cuánto dura el viaje? ¿cuál es la velocidad final? La velocidad final ¿puede ser cero?
5. Supongamos ahora que  $M = m$  y llamemos  $\mathcal{P}$  al plano que equidista de ambas masas:
  - (a) Hallar el potencial gravitatorio en  $\mathcal{P}$  y ver que es radial (en algún sistema de coordenadas polares adecuado)
  - (b) Describir cualitativamente las posibles trayectorias para cada elección de  $\vec{r}_0$  y  $\vec{v}_0$ .
  - (c) Resolver el caso  $\dot{\theta} = 0$ , ver que el movimiento (radial) es periódico; hallar el período.
  - (d) Resolver el caso general

## 2 Fuerzas no conservativas

**Ejercicio 3** Una bolilla con masa  $m$  realiza un camino dado por el gráfico de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } 3 < x < 4 \end{cases}$$

En el instante inicial está en reposo en  $x = 0$ . En intervalo  $[2, 3]$  es el único que tiene rozamiento, siendo  $\mu_d = 0.2$  ¿en qué unidades se mide  $\mu_d$ ?

1. Describir cualitativamente el movimiento de la bolilla.
2. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza del otro lado? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza cuando vuelve? ¿Cuánta energía pierde por viaje?
3. ¿Cuál debe ser la altura mínima necesaria para que la bolilla atraviese la región de fricción en el primer viaje de ida?
4. ¿Cuántas veces pasó por  $x = 2$ ?

5. ¿Dónde esperamos encontrar a la partícula una vez que se haya detenido?

**Ejercicio 4** El juego más visitado del Garom-Park -el parque de diversiones más importante de Turdera- es una variante de la montaña rusa que consiste en dejar caer al carrito desde una altura  $H$  para hacerlo entrar en un lúpín (no confundir con lupín) tangente al piso y de radio  $3m$

1. ¿Cuál debe ser la rapidez mínima necesaria en el extremo superior del lúpín para que el carrito no se caiga? ¿Qué sistema de coordenadas conviene utilizar?
2. Suponiendo que no hay rozamiento ¿cuál debe ser la altura mínima necesaria para que el carrito no caiga (y nos cierren el parque)?
3. No obstante, el manual de instalación indica que la mínima altura segura es un 30% mayor a la calculada anteriormente ¿cuánto vale el trabajo de las fuerzas disipativas?

**Ejercicio 5** Una masa  $M$  realiza un movimiento oscilatorio amortiguado con coeficiente de amortiguación  $\mu$ , si  $E$  es la energía total del sistema y  $T$  la energía cinética probar que

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2\mu T}{M}$$