

TOPOLOGÍA
Práctica 1

1. (i) En \mathbb{R}^n definimos

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Mostrar que d' es una métrica y que (\mathbb{R}^n, d') tiene los mismos abiertos que \mathbb{R}^n con la topología usual. Dibujar la bola abierta de centro 0 y radio 1 cuando $n = 2$.

- (ii) Dado $p \geq 1$, definimos

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

¿Es cierto que sigue teniendo los mismos abiertos? Dibujar en \mathbb{R}^2 como varían las bolas de centro 0 y radio 1 para los diferentes p .

2. Sea (X, d) un espacio métrico, definimos $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Probar que d' es una métrica. Definen d y d' los mismos conjuntos abiertos? los mismos cerrados? y los mismos acotados?

3. Consideremos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\rho_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\rho_2 = \sup\{|x_i - y_i|\}.$$

¿Es alguna de estas una métrica? Si no lo son, ¿puede sugerir alguna modificación para que lo sean?

4. Consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con cada una de las métricas definidas por usted en el ejercicio anterior y sea \mathbb{R}^{∞} el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que consiste de las sucesiones tienen finitas coordenadas no nulas. Calcular su clausura.

5. Sea $\ell^2 = \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\}$. Probar que ρ_1 del ejercicio 3 es una métrica para este conjunto.

6. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$.

Probar que \overline{A} es igual a $\{x \in X : \exists (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ tal que } a_k \rightarrow x\}$.