$2^{do}$ *cuatrimestre* 2001

# TOPOLOGÍA

Práctica 10

1. Sea $X$ un espacio regular. Probar que dados dos puntos en $X$ tienen entornos cerrados disjuntos.

2. Sea $X$ un espacio normal. Probar que dados dos conjuntos cerrados disjuntos de $X$ tienen entornos cerrados disjuntos.

3. Sea $X$ con la topología del orden. Probar que $X$ es regular.

4. Probar que todo espacio localmente compacto Hausdorff es regular.

5. Probar que todo espacio Lindelöf regular es normal.

6. ¿Es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto normal?

7. Sea $p : X \to Y$ continua y cerrada. Probar que si $X$ es normal $Y$ también lo es.

8. Mostrar que Tietze implica Urysohn.

9. (i) Mostrar que un espacio conexo normal con más de un punto es no numerable.
   (ii) Mostra que un espacio conexo regular con más de un punto es no numerable

10. Sean $A$ y $B$ dos cerrados disjuntos de un espacio normal $X$. Probar que $A$ es una intersección numerable de abiertos si, y sólo si, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f(B) = \{1\}$.

11. Sea $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ una sucesión de espacios topológicos tales que $X_i$ es un subespacio cerrado de $X_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $X = \bigcup X_i$ y deffnimos $A \subset X$ es abierto si, y sólo si, $A \cap X_i$ es abierto en $X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
    (i) Probar que $X_i$ es un subespacio de $X$.
    (ii) Probar que si $X_i$ es normal para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $X$ también lo es.

12. Dar un ejemplo de un espacio Hausdorff $N_2$ no metrizable.

13. Sea $X$ un espacio compacto Hausdorff. ¿Es cierto que si $X$ es $N_2$ entonces $X$ es metrizable? ¿Vale la recíproca? ¿y si $X$ es localmente compacto Hausdorff?

14. Un espacio $X$ es localmente metrizable si cada punto tiene un entorno metrizable (con la topología de subespacio). Probar que:
    (i) Un espacio compacto Hausdorff localmente metrizable es metrizable.
    (ii) Un espacio Lindelöf regular localmente metrizable es metrizable.

15. Sea $X$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones continuas a valores reales que separan puntos de cerrados. Probar que la topología de $X$ es la más gruesa para la cual las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.

16. Sea $X$ completamente regular. Probar que existe una inmersión de $X$ en $[0,1]^J$.

17. Probar que toda variedad es regular (y por lo tanto metrizable).

18. ¿Bajo que condición un espacio metrizable admite una compactiffcación metrizable?

**Ejercicio para entregar el** 12/11/01**:**

Sea $X$ un espacio metrizable y no compacto. Probar que:

1. existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua no acotada.

2. existe $f : X \to [0,1]$ continua que no alcanza el máximo.