2^{do} *buatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 11

1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $a, b \in X$. Sea γ un camino en X entre a y b. Probar que $\gamma \sim_a \overline{ab}$ (donde $\overline{ab}$ denota el segmento de origen a y extremo b).

2. Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

   (i) Probar que $[X, I]$ tiene un único elemento, para todo espacio X.

   (ii) Si Y es conexo por arcos $[I, Y]$ tiene un único elemento.

3. (i) $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   (ii) Un espacio contráctil es arcoconexo.

   (iii) Si Y es contráctil, $\forall\ X\ : [X, Y]$ tiene un único elemento.

   (iv) Si X es contráctil, Y arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un único elemento.

   (v) Probar que el producto de espacios contráctiles es contráctil.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ estrellado (existe $a \in A$ tal que, para todo $x \in A$, $\overline{ax} \subset A$).

   (i) ¿Es todo conjunto estrellado convexo?

   (ii) Si A es estrellado, entonces es simplemente conexo.

   (iii) Si A es estrellado, dos arcos con los mismos extremos son homotópicos.

5. Sean X conexo por arcos y $x, y \in X$. Probar que $\pi_1(X, x)$ es abeliano si, y sólo si, para todo par de caminos α y β entre x e y, se tiene que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

6. Probar que si X es contráctil, $X \simeq \star$.

7. Probar que si $X \simeq Y$ y X es contráctil entonces Y lo es.

8. (i) Sean $a \in A \subset X$ y $r : X \to A$ una retracción. Mostrar que $r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ es suryectiva.

   (ii) Mostrar que si $r : X \to A$ es un retracto por deformación fuerte $\pi_1(X, a)$ es isomorfo a $\pi_1(A, a)$.

9. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, Si $h : (A, a) \to (Y, y)$ puede extenderse continuamente a todo $\mathbb{R}^n$, entonces h_* es el morfismo unidad.

10. Sea X conexo por arcos, $x_0, x_1 \in X$. Probar que son equivalentes:

a) X es simplemente conexo

b) Dados dos arcos que unen x_0 y x_1 son homotópicos.

Ejercicio para entregar el 26/11/01**:**

Sea X un espacio topológico, llamamos *bono soare* X a $\mathrm{Con}(X) = X \times I / X \times \{1\}$ ($I = [0, 1]$).

a) Sean $p : X \times I \to \mathrm{Con}(X)$ la proyección al cociente y $p_0 : X \to \mathrm{Con}(X)$ dada por $p_0(x) = p(x, 0)$.

   Probar que p_0 es una inmersión.

b) Probar que $\mathrm{Con}(X)$ es contráctil.

c) Sea $f : X \to Y$ continua. Probar que $f \sim cte$ si, y sólo si, f se extiende a $\mathrm{Con}(X)$, esto es, existe $h : \mathrm{Con}(X) \to Y$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{Con}(X) \arrow[r, dashed] & Y \end{tikzcd}$$