2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 12

1. Probar que $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^n$ es un revestimiento.
2. Considerar el revestimiento de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$: $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por $p(x,t) = (t\ \cos nx, t\ \operatorname{sen} nx)$. Encontrar levantamientos de las curvas:
   (i) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ definida como $\gamma(t) = (2-t, 0)$.
   (ii) $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ definida como $\delta(t) = ((1+t)\cos 2\pi t, (1+t)\operatorname{sen} 2\pi t)$.
3. Mostrar que no existe una retracción $r : B^2 \to S^1$, donde $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$.
4. Calcular $\pi_1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}$ el toro.
5. Calcular $\pi_1(X)$ en cada uno de los siguientes casos:
   (i) $X = B^2 \times S^1$
   (ii) $X = S^1 \times S^1 \setminus \{(a,b)\}$
   (iii) $X = S^1 \times I$
   (iv) $X = S^1 \times \mathbb{R}$
   (v) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \geq 1\}$
   (vi) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| > 1\}$
   (vii) $X = S^1 \times (\mathbb{R} \times \{0\})$
6. Probar que si $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ y $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$, entonces
$$H_1(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$
7. Sean $E_n^+ = \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$ y $E_n^- = \{x \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$.
   Probar que $H_p(S^n, E_n^-) \simeq H_p(E_n^+, S^{n-1})$.
8. Probar que, $\forall q \geq 2$ y $\forall n \geq 1$, $H_q(S^n) \simeq H_{q-1}(S^{n-1})$.
9. Probar que $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$; $\ H_0(S^1) = \mathbb{Z}$ y $H_q(S^1) = 0\ \ \forall q \geq 2$.
10. Calcular $H_q(S^n)\ \ \forall q, n$ y $H_q(D^n, S^{n-1})$. Probar que S^n no es contráctil.
11. Probar que S^{n-1} no es retracto de D^n.
12. Calcular $H_q(\mathbb{T})\ \ \forall q \geq 0$.

Ejercicio para entregar el 10/12/01**:**

Sea G un grupo finito que actúa sobre el espacio X y tal que $g.x \neq x$ si $g \neq 1$. Probar que si X es una variedad compacta y simplemente conexa entonces $\pi_1(X/G, x_0) \simeq G$.