$2^{do}$ *cuatrimestre* 2001

# TOPOLOGÍA

Práctica 2

1. Sea $X$ un conjunto. Decidir si las siguientes familias de subconjuntos son topología. Ordenarlas.
   (a) $\mathcal{T}_1 = \{A : A \subset X\}$
   (b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X\}$
   (c) $\mathcal{T}_3 = \{A \subset X : X \setminus A \text{ es finito o } X\}$
   (d) $\mathcal{T}_4 = \{A \subset X : X \setminus A \text{ es numerable o } X\}$
   (e) $\mathcal{T}_5 = \{A \subset A : X \setminus A \text{ es infinito}\}$

2. Decidir si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ forman una base de $\mathbb{R}^2$ con la topología euclídea.
   (a) $\{B(a,\epsilon) = \{(x,y) : |x-a_1| + |y-a_2| < \epsilon\} \,:\, a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2; \epsilon > 0\}$
   (b) $\{W(a,\epsilon) = \{(x,y) : \sup\{|x-a_1|, |y-a_2|\} < \epsilon\} \,:\, a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2; \epsilon > 0\}$

3. Decidir si las siguientes familias de conjuntos son subbases para las topologías indicadas
   (a) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento finito.
   (Considerar al conjunto vacío si $X$ no es finito.)
   (b) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento numerable.

4. Decir si los siguientes subconjutos pueden formar una base para alguna topología de $\mathbb{R}$. Ordenarlas en caso que se pueda.
   (a) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$
   (c) $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$
   (d) $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$
   (e) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$

5. Sea $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$. Si $C$ es una unión disjunta de intervalos cerrados de $[0,1]$ y $A$ es un abierto de $\mathbb{R}$, definimos:

$$B(C,A) = \{f \in X : f(C) \subset A\}$$

   Consideremos $\mathcal{F} = \{B(C,A) : \text{para todos los posibles } C \text{ y } A\}$.
   (a) Estudiar si $\mathcal{F}$ puede o no formar una subbase de alguna topología de $X$.
   (b) Comparar, si es posible, esta topología con la inducida por $||f||_\infty = \sup\{f(t) : t \in [0,1]\}$.

6. Sea $X$ un espacio topológico e $Y \subset X$ un subespacio con la topología inducida. Sea $A \subset Y$. Probar:
   (a) $A$ es cerrado en $Y$ si, y solo si, existe $C$ cerrado en $X$ tal que $A = C \cap Y$.

(b) $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

7. Sean $A$ y $B$ subconjuntos de un espacio topológico $X$. Probar:

   (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   (b) $\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$

   (c) $\bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha \supseteq \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha}$

   (d) $A^o \cap \delta(A) = \emptyset \Rightarrow \overline{A} = A^o \cup \delta(A)$. Mostrar con un ejemplo que no vale $\Leftarrow$.

   (e) $\delta(A) = \emptyset \Rightarrow A$ es abierto y cerrado.

   (f) $A$ es abierto $\Leftrightarrow \delta(A) = \overline{A} \setminus A$.

   (g) Es cierto que si $A$ es abierto $A = \overline{A}^o$?

   (h) $(A^c)^o = \overline{A}^c$ y $\overline{A^c} = (A^o)^c$.

8. En cada uno de los siguientes casos, calcular $\overline{A}$:

   (a) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^2$ con la topología del complemento finito.

   (b) $A = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(t) \neq 0 \ \forall t\}$ en $\mathcal{C}[0,1]$ con la topología definida en el ejercicio 5.

   (c) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \det(M) \neq 0\}$ en $\mathcal{S}^n = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas $\}$ con la topología inducida por la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n^2}$.

9. En cada uno de los siguientes casos, calcular $A^o$:

   (a) $A = \mathcal{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n^2}$.

   (b) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \det(M) \neq 0\}$ en $\mathcal{S}^n$.

   (c) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \ \min\{|\lambda| : \lambda$ es autovalor de $M, \lambda \neq 0\} \geq 1\}$.

   (d) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \ \min\{|\lambda| : \lambda$ es autovalor de $M\} \geq 1\}$.

   (e) $A = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \exists t_0 \in [0,1]$ con $f(t_0) = 0\}$, en $\mathcal{C}[0,1]$ con la topología dada por $|| \, ||_\infty$.

   (f) $A = \{h \in L^2[0,1] : \int_0^1 f \cdot h = 0\}$ con $f$ continua en $[0,1]$ y la topología en $L^2[0,1]$ dada por $||f||_2 = (\int_0^1 f^2)^{\frac{1}{2}}$.

10. Probar que si $X$ es un espacio vectorial con la topología dada por una norma y $S$ es un subespacio vectorial propio, entonces $S^o = \emptyset$.

11. Calcular el borde de los subespacios de los ejercicios 9 y 10.

**Ejercicio para entregar el 3-9-01**
Sean $Z = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{F} = \{U_g : g \in \mathbb{C}[X,Y]\}$ con $U_g = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : g(z_1, z_2) \neq 0\}$.
Decidir si $\mathcal{F}$ puede formar un base de alguna topología.