2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 3

Definiciones

Espacio topológico T_1: $\forall\ x \neq y$ existe un entorno U de x tal que $y \notin U$.

Espacio topológico Hausdorff (o T_2): $\forall\ x \neq y$ existen entornos U de x y V de y tal que $U \cap V = \emptyset$.

1. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Mostrar que la colección de rayos abiertos de X forman una subbase para la topologia del orden.

2. Considerar el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes conjuntos:

   (i) $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$
   (ii) $\{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$
   (iii) $\{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$
   (iv) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$
   (v) $\{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$

3. Mostrar que la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología usual.

4. Mostrar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la misma que la topología producto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ denota a $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Compararla con la topología usual en $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $\mathbb{R}_l$, $\mathbb{R}$ con la topología dada por la base $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ (topología del límite inferior) . Si L es una linea recta en el plano, describir la topología que L hereda como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$. (Siempre es una topología familiar.)

6. Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Comparar la topología producto $I \times I$, la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y la topología $I_d \times I$, donde I_d denota a I con la topología discreta.

7. Sea $(X, <)$ con la topología del orden. Mostrar que $\overline{(a, b)} \subset [a, b]$. ¿Cúando vale la igualdad?

8. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

9. Mostrar que la topología del orden es Hausdorff.

10. Mostrar que el producto de dos espacios Hausdorff es Hausdorff.

11. (i) Mostrar que el axioma T_1 es equivalente a que todo conjunto ffnito es cerrado.
    (ii) Sea X un conjunto. La topología $\mathcal{I}_f$ del complemento ffnito satisface T_1 y está contenida en cualquier topología T_1 de X. ¿Es $\mathcal{I}_f$ Hausdorff ?

12. Considerar las diferentes topologías en $\mathbb{R}$ dadas en la práctica 2.
    (i) Determinar la clausura de $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ para cada topología.
    (ii) ¿Cuáles de estas topologías son Hausdorff? ¿ cuáles son T_1?

13. Sean X un espacio topologíco y $A \subset X$. Probar que:
    (i) Un punto x es de acumulación de A si, y solo si, existe una red en $A \setminus \{x\}$ que converge a x.
    (ii) Un punto x está en la clausura de A si, y solo si, existe una red en A que converge a x.
    (iii) A es cerrado si, y solo si, ninguna red en A converge a un punto de $X \setminus A$.

Ejercicio para entregar el 13-9-01:

Mostrar que X es Hausdorff si, y sólo si, la diagonal, $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$, es cerrada en $X \times X$ con la topolgía producto.