2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 4

1. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Probar que son equivalentes:

   (i) f es continua

   (ii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

   (iii) $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

   (iv) Si $(x_\alpha) \subset X$ red convergente a x, entonces $(f(x_\alpha)) \subset Y$ es una red convergente a $f(x)$.

2. Considere $[0, 2\pi)$ con la topología inducida de $\mathbb{R}$ y S^1, la circunferencia de radio 1, con la inducida de $\mathbb{R}^2$. Sea $f : [0, 2\pi) \to S^1$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. ¿Es f un homeomorffsmo?

3. Construir un homeomorffsmo entre

   (i) $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$.

   (ii) $S^n - \{p\}$ y $\mathbb{R}^n$, $p \in S^n$ cualquiera.

4. Sea $X = \displaystyle\bigcup_i U_i$, U_i abierto; $f_i : U_i \to Y$ continua en cada U_i y $f_i = f_j$ en $U_i \cap U_j$.

   Probar que $f(x) := f_i(x)$ si $x \in U_i$ está bien deffnida en todo X y es continua.

5. Sean X e Y espacios topológicos. Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $X = \bigcup A_\alpha$ y $f : X \to Y$ una función tal que $f|_{A_\alpha}$ es continua $\forall \ \alpha \in \Lambda$.

   (i) Si Λ es ffnito entonces f es continua.

   (ii) Buscar un ejemplo con $\Lambda = \mathbb{N}$ y f no continua.

   (iii) Diremos que $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia localmente ffnita si $\forall \ x \in X$, $\exists$ un entorno U de x tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para ffnitos $\alpha \in \Lambda$. Mostrar que si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es localmente ffnita entonces f es continua.

6. Analizar la continuidad de las siguientes aplicaciones

   (i) $\det : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{S}^n = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétricas $\}$.

   (ii) $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del diccionario.

   (iii) $\mathcal{C}[0, 1]$ con la topología dada por $|| \, ||_\infty$:

   $$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & f(0) \end{array}$$

7. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$.

   $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

   Probar que χ_E es continua en x si, y solo si, $x \notin \delta(E)$.

8. Demostrar que $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no es cerrada.

9. Sean X, X' un mismo espacio topológico con topologías $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ respectivamente, $id : X' \to X$ la función identidad.

   (i) id es continua si, y solo si, $\mathcal{I}'$ es más ffna que $\mathcal{I}$.

   (ii) id es un homeomorffsmo si, y solo si, $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$.

   (iii) Si $n \in \mathbb{N}$, deffnimos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{I}_n$ adjuntandole a la topología usual el conjunto $\{n\}$. Mostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_1)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_2)$ pero $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$.

10. (i) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, f es un homeomorffsmo.

   (ii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es continua.

   (iii) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$. Deffnimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   Probar que f es biyectiva y preserva el orden ¿Es f un homeomorffsmo?

11. (i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a derecha. Probar que f es continua considerada como función de $\mathbb{R}_l$ en $\mathbb{R}$.

   (ii) ¿Cómo son las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_l$? ¿ y las de $\mathbb{R}_l$ en $\mathbb{R}_l$?

12. Sean X un espacio topológico cualquiera e Y un conjunto ordenado, con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

   (i) Probar que $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

   (ii) La función $h : X \to Y$ deffnida como $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ es continua.

13. Sean $Y = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y $p_{\alpha_0} : Y \to X_{\alpha_0}$ la proyección. Probar que p_{α_0} es abierta.

14. Probar que $f : A \to \prod_\alpha X_\alpha$ es continua si, y solo si, $p_{\alpha_i} \circ f$ es continua, donde $p_{\alpha_i} : \prod_\alpha X_\alpha \to X_{\alpha_i}$ es la proyección.

15. Probar que si $A_\alpha \subset X_\alpha \ \forall \alpha \in I$ entonces $\prod_\alpha A_\alpha \subset \prod_\alpha X_\alpha$ y que $\overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$.

Ejercicio para entregar el 24-9-01:

Sean X, Y un espacios topologicos, Y Hausdorff, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ función continua. Probar que si existe $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ extensión continua de f, ésta es única.