2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 5

1. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}'$ dos topologías dadas en un conjunto X, tales que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$.

   (i) Si X es compacto en alguna de ellas, ¿qué puede decirse de su compacidad con respecto a la otra?

   (ii) Mostrar que si X es compacto y Hausdorff con ambas topologías, entonces $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$ ó no son comparables.

2. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología del complemento ffnito. Mostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto con esta topología.

3. Estudiar la compacidad del $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior.

4. ¿Es la unión ffnita de conjuntos compactos compacto?

5. Sea (X, d) es un espacio métrico. Estudiar la veracidad de la siguiente affrmación:

   $A \subset X$ es compacto si, y solo si, A es cerrado y acotado.

6. Un espacio topológico X es compacto si, y solo si, toda red en X tiene un punto de aglomeración. (Sea (x_α) red. x es punto de aglomeración si para todo entorno U de x y todo α existe $\beta \geq \alpha$ tal que $x_\beta \in U$.)

7. Sea X un espacio Hausdorff. Sean A y B compactos disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U y V conteniendo a A y B respectivamente.

8. Sea $f : X \to Y$ función continua. Probar que si X es compacto e Y Hausdorff, f resulta cerrada.

9. Sea Y compacto Hausdorff. Probar que $f : X \to Y$ es continua si, y solo si,

   $$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y \quad \text{(gráffco de } f\text{)}$$

   es cerrado en $X \times Y$ (con la topología producto).

10. Sean $A \subset X$, $B \subset Y$ y N un abierto de $X \times Y$ tal que $A \times B \subset N$. Probar que si B es compacto, existe un abierto U de X tal que $A \times B \subset U \times B \subset N$. Mostrar que si A es también compacto entonces existe además un abierto V de Y tal que $A \times B \subset U \times V \subset N$.

11. Sean X un espacio compacto y $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión monotona creciente de funciones continuas que convergen puntualmente a una función continua f. Probar que la convergencia es uniforme.

    ¿Es este resultado válido si X no es compacto ó si la sucesión no es monotona creciente?

    Nota: (f_n) es monotona creciente si para todo n y x, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Ejercicio para entregar el 1-10-01:

Probar que Y es compacto si, y solo si, $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada para cualquier X.