2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 6

1. Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

2. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. Probar que para todo $x \in X$, la familia de entornos compactos y cerrados forman una base de entornos.

3. Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Mostrar que $\prod X_\alpha$ es localmente compacto si, y solo si, cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto para todos los α salvo un número ffnito.

4. Sea X un espacio localmente compacto y $f : X \to Y$ una función continua. ¿Es $f(X)$ localmente compacto?, ¿y si suponemos que f es además abierta?

5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Sea $X^* = X \cup \{*\}$ y deffnimos $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus C : C$ compacto cerrado de $X\}$. Probar que $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es un espacio topológico compacto y la topología inducida en X por $\mathcal{T}^*$ coincide con $\mathcal{T}$. Además X^* es Hausdorff si, y solo si, X es localmente compacto Hausdorff.

   X^* se denomina *compactiffcación de Alexandroff* o *compactiffcación por un punto* de X.

6. ¿Cuál es la compactiffcación de Alexandroff de $\mathbb{R}$?, ¿y la de $\mathbb{R}^2$?

7. Sea X un espacio cuya topología tiene una base numerable.

   (i) Probar que X es Lindelöf.

   (ii) Mostrar que si $A \subset X$ es no numerable entonces algún punto de A es de acumulación de A.

   (iii) Toda colección de abiertos disjuntos de X es numerable.

   (iv) Mostrar que existe $D \subset X$ denso numerable. (Un espacio X con esta propiedad se llama *separable.*)

8. (i) Probar que $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf pero no tiene una base numerable.

   (ii) Probar que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es Lindelöf.

Ejercicio para entregar el 11-10-01:

Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice σ-compacto si $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donde cada A_n es un compacto de X.

1. Probar que todo espacio σ-compacto es de Lindelöf.

2. Probar que todo espacio localmente compacto y Lindelöf es σ-compacto.

3. Probar que el producto de dos espacios σ-compactos es σ-compacto.