2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 7

1. Sean X y Z espacios topológicos y $g : X \to Z$ una función continua y suryectiva. Sea X^* la siguiente colección de subconjuntos de X con la topología cociente:

$$X^* = \{g^{-1}(z) : z \in z\}.$$

Probar:

(i) X^* es Hausdorff si Z lo es.

(ii) g induce una función $f : X^* \to Z$ continua y biyectiva si, y sólo si, $g : X \to Z$ es un cociente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X^* \arrow[r, dashed] & Z \end{tikzcd}$$

2. Sea $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ con la topología inducida por la métrica usual. Sea $\pi_1 : Y \to \mathbb{R}$ la proyección a la primera coordenada.

Mostrar que $\pi_1 : Y \to \mathbb{R}$ no es ni abierta ni cerrada pero es un cociente.

3. Sean $Z = (\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ dada por:

$$\begin{array}{rcll} g(x,y) & = & (x,0) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0,y) & = & (0,y) & \end{array}$$

(i) Mostrar que si $\mathbb{R}^2$ tiene la topología usual y Z la inducida por ésta, g no es continua y, por lo tanto, Z no tiene la topología cociente.

(ii) Mostrar que Z no es Hausdorff con la topología cociente inducida por g.

4. (i) Sea $p : X \to Y$ un cociente y Z un espacio localmente compacto Hausdorff. Probar que:

$$\pi = p \times id_Z : X \times Z \to Y \times Z$$

es una función cociente.

(ii) Sea $p : A \to B$ y $q : C \to D$ funciones cocientes. Si B y C son localmente compactos Hausdorff, entonces $p \times q : A \times C \to B \times D$ es también un cociente.

5. Deffnimos $\mathbb{P}^n := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ donde $a \sim b \Leftrightarrow a = \lambda b$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Probar que $\mathbb{P}^n$ es homeomorfo a $S^n/\simeq$, donde $c \simeq d \Leftrightarrow c = d$ ó $c = -d$.

6. Probar que $\mathbb{P}^1$ es homeomorfo a S^1.

7. Mostrar que la aplicación $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = (x_0^2 - x_1^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$$

es continua e inyectiva.

8. Considerar $\mathbb{M}$ la banda de Möbius:

$$\mathbb{M} := [0,1] \times [0,1]/(0,t) \sim (1, 1-t)$$

Probar:

(i) $\mathbb{M}$ con la topología cociente está inmersa en $\mathbb{R}^3$.

(ii) Si $p : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{M}$ es la proyección al cociente, $p([0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\})$ es homeomorfo a S^1.

9. Deffnimos $\mathbb{T}$, el toro, como el cociente de $[0,1] \times [0,1]$ por la relación:

$$(t,0) \sim (t,1) \quad \text{y} \quad (0,t) \sim (1,t).$$

Probar que $\mathbb{T}$ es homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

10. Calcular $\mathbb{R}^2/\sim$ donde

(i) $(x,y) \sim (w,z) \Longleftrightarrow x + y^2 = w + z^2$.

(ii) $(x,y) \sim (w,z) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = w^2 + z^2$.

Ejercicio para entregar el 18-10-01:

Sean $\mathbb{Q}$ los racionales con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ el cociente. Probar que p es cerrada y que

$$p \times id_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$$

no es un cociente.