2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 8

1. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías dadas en un conjunto X, tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Si X es conexo en alguna de ellas, ¿qué puede decirse de su conexidad con respecto a la otra?

2. Sea A conexo. ¿ Son conexos el interior y el borde de A?

3. Sea $A \subset X$, C un subconjunto conexo de X que interseca A y A^c. Probar que $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   (i) X es totalmente disconexo si, y sólo si, su topología es la discreta.

   (ii) X es conexo si, y sólo si, para todo $A \neq \emptyset, A \subseteq X \ : \ \partial A \neq \emptyset$.

5. Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Mostrar que si $\prod X_\alpha$ es conexo, cada X_α lo es.

6. Sea $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de subespacios conexos de X. Si existe $A \subset X$ conexo tal que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$ entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.

7. Decidir si los siguientes conjuntos son conexos. Justificar.

   (i) $\mathbb{R}_l$

   (ii) $X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2$.

   (iii) $\mathbb{N} \times [0,1)$ con la topología del diccionario.

   (iv) $[0,1) \times \mathbb{N}$ con la topología del diccionario.

   (v) $[0,1) \times [0,1]$ con la topología del diccionario.

   (vi) $[0,1] \times [0,1)$ con la topología del diccionario.

   (vii) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas.

8. Sea X con la topología del complemento finito. Mostrar que si X es infinito, entonces X es conexo.

9. Sean $Y \subset X$ ambos conexos. Mostrar que si A y B dan una separación de $X \smallsetminus Y$, entonces $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos.

10. (i) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo (i.e., existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$). ¿Qué pasa si se cambia $[0,1]$ por $(0,1]$? ¿y por $(0,1)$?

    (ii) Mostrar que $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$ no son homeomorfos (tomados de dos).

11. Mostrar que, para todo $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.

12. Hallar las componentes conexas de $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \ \cup \ \{(0,0);(0,1)\}$. Verificar que si $A \subset X$ es un abierto-cerrado entonces $\{(0,0);(0,1)\} \subset A$ ó $A \subset \{(0,0);(0,1)\}^c$.

Ejercicio para entregar el 29/10/01**:**

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X, tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\bigcup A_n$ es conexo.