2^{do} *cuatrimestre* 2001

TOPOLOGÍA

Práctica 9

1. (i) ¿Es el producto de arcoconexos arcoconexo?
   (ii) ¿Es la clausura de un arcoconexo arcoconexa?
   (iii) ¿Es la imagen por una función continua de un arcoconexo arcoconexa?
   (iv) ¿Es la unión de espacios arcoconexos con por lo menos un punto en común arcoconexa?

2. Decidir cuál de los espacios conexos del ejercicio 5 de la práctica 8 son arcoconexos. Si no lo son, hallar sus componentes arcoconexas.

3. Sea X un espacio topológico. Probar que cada componente arcoconexa de X está incluída en una componente conexa de X.

4. Sea X localmente (arco)conexo. Probar que sus componentes (arco)conexas son abiertas.

5. Sea X localmente arcoconexo. Probar que sus componentes conexas y arcoconexas son las mismas.

6. Determinar las componentes conexas y arcoconexas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$.
   (i) $A = (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]) \cup \{0\} \times [0,1]$
   (ii) $B = A \setminus \{(0, \frac{1}{2})\}$
   (iii) $C = B \cup ([0,1] \times \{0\})$

7. Sean X localmente conexo y $f : X \to Y$ continua. ¿Es $f(X)$ necesarimente localmente conexo? ¿y si f es además abierta?

8. Sea X localmente arcoconexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arcoconexo.

Definición: Una variedad n-dimensional M es un espacio de Hausdorff en el que cada punto tiene un entorno homeromorfo a $\mathbb{R}^n$.

9. Probar que S^n y $\mathbb{P}^n$ son variedades.

10. Sea $X = (-1, 2]$ con la topología dada por la base:

$$\begin{array}{ll} (\alpha, \beta) & -1 \leq \alpha < \beta \leq 2 \\ (\alpha, 0) \cup (\beta, 2] & -1 \leq \alpha < 0 \ , \ -1 \leq \beta < 2 \end{array}$$

Probar que todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$ pero no es Hausdorff por lo que no es una variedad.

11. Probar que el producto de dos variedades en una variedad.

12. Mostrar que $\mathbb{T}$, el toro, tiene dos curvas, C_1 y C_2, cerradas simples pero no disjuntas, tal que $\mathbb{T} \setminus (C_1 \cup C_2)$ es conexo.

Ejercicio para entregar el 5/11/01**:**

Sea G un grupo ffnito que actúa sobre el espacio X y tal que $g.x \neq x$ si $g \neq 1$. Probar que si X es una variedad compacta entonces X/G también lo es.